

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

线性代数附册
学习辅导与习题全解

同济·第六版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

□ 高等数学 第七版 上册	同济大学数学系
□ 高等数学 第七版 下册	同济大学数学系
□ 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济・第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 上册 同济・第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 下册 同济・第七版	同济大学数学系
□ 工程数学——线性代数 第六版	同济大学数学系
■ 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济・第六版	同济大学数学系
□ 工程数学——概率统计简明教程 第二版	同济大学数学系
□ 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版	同济大学数学系
□ 工程数学——新编统计学	同济大学数学系


ISBN 978-7-04-039689-8

定价 21.80 元

College Mathe
大学数学学习

线性代数附册

学习辅导与习题全解

同济 · 第六版

同济大学数学系 编

XIANXING DAISHU FUCE XUEXI FUDAO YU XITI QUANJIE

高等教育出版社 · 北京

内容提要

本书是与同济大学数学系编《工程数学——线性代数》第六版教材配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的读者；本书是由该教材的编者编写。

本书在《工程数学——线性代数》第五版附册（即辅导书）的基础上修订而成，修订时对要求偏高的内容又作了一定程度的删节或改写；同时结合近年来的教学实践，加强了一些基本概念的讲解和基本运算的训练，使之更贴近“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。全书与教材一致分为六章，每章内容包括基本要求、内容提要、学习要点、释疑解难、例题剖析与增补、习题解答、补充习题（附答案和提示）等七个栏目。其中“释疑解难”显示出编者对课程内容的深刻理解和长期积累的丰富经验；“例题剖析与增补”充分开发出例题的内涵，并有助于读者掌握举一反三的学习方法；“习题解答”注重阐明解题的思想和方法，并对全书习题作出规范解答。

本书具有相对的完整性和独立性，不仅面向使用同济《工程数学——线性代数》第六版的读者，也可作为一般线性代数课程的学习辅导书和考研参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数附册学习辅导与习题全解：同济第6版/同济大学数学系编. --北京：高等教育出版社，2014.7
ISBN 978-7-04-039689-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①同… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第123234号

策划编辑 王 强 责任编辑 李 茜 封面设计 王凌波 版式设计 马敬茹
责任校对 陈 杨 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	保定市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	13	版 次	2014年7月第1版
字 数	230千字	印 次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	21.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39689-00

前　言

本书是与同济大学数学系编《工程数学——线性代数》第六版相配套的学习辅导书，是在第五版辅导书的基础上修订而成的。修订的指导思想与教材修订的想法是一致的。

本书按《工程数学——线性代数》第六版的章节顺序逐章编写，每章包括以下几部分内容：

一、基本要求　主要根据教育部高教司颁发的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”确定，同时也根据当前的教学实际作了少许修改并细化。

二、内容提要　归纳本章的主要内容。

三、学习要点　概括地阐明本章的重点和学习的关键。

四、释疑解难　针对本章的重点内容和较难理解的内容，针对学生在学习本章时常常问及的一些共同性的并有较大意义的问题，编选出若干个问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难并加深理解。

五、例题剖析与增补　对教材中一些典型的例题加以剖析，分析其解题思路、所用的原理和方法，说明该例的意义或引申到一般化的结论；增补的例题是教材例题的扩充和深化，旨在帮助读者加深理解一些重要的概念和提高解决问题的综合能力，而不在于它的解题技巧，其内容和要求仍属于基本要求的范围。

六、习题解答　对教材中全部习题作出解答，其中部分习题给出几种解法，并视需要作适当的评述。

七、补充习题（附答案和提示）　为满足读者练习的需要，补充少量习题，其中包括若干选择题。

本书仍由同济大学数学系骆承钦、胡志庠合编。限于水平，书中难免存在不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2013 年 4 月

使用说明

1. 本书中所称“教材”是指同济大学数学系编《工程数学——线性代数》第六版。

2. “释疑解难”中的问题编号用“问 $m.n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“例题剖析与增补”中例题的编号“例 n”为该例在教材同一章中的编号，增补的例题编号用“例 $m.n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“习题解答”中的题号为该习题在教材同一章中的编号，“补充习题”的编号用“$m.n$”，m 为章号，n 为题号。

3. 本书中采用的逻辑符号的含义：

$\forall$ 任给

$\Rightarrow$ 推出

$\Leftrightarrow$ 互推，等价，充分必要条件

目 录

第1章

行　列　式

基本要求

1. 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.
2. 知道 n 阶行列式的定义及性质.
3. 知道代数余子式的定义及性质.
4. 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

内容提要

1. 行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 叫做 D 的 (i,j) 元.

二阶和三阶行列式的计算适用对角线法则.

2. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 对换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行

列式;或者,行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式记号之外.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一列(行)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列式之和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(第 j 列)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(两个行列式的第 j 列分别标注"第 j 列")

此时,可形象地称为行列式按第 j 列拆成两个行列式.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

3. 行列式的按行(按列)展开

(1) 把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列画去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 (i,j) 元的代数余子式.

(2) n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积的和.即 D 可以按第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或者按第 j 列展开:

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j,$$

和

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j.$$

4. 一些常用的行列式

（1）上、下三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（未标明的元素均为零，下同）.

特别，对角行列式等于对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n .$$

（2）设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2 .$$

学 习 要 点

本章的重点是行列式的计算. 对于 n 阶行列式的定义只需了解其大概的意思，对于行列式各条性质的证明只需了解其基本思路. 要注重学会利用这些性质及按行(列)展开等基本方法来简化行列式的计算，并掌握两行(列)对换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算. 按照“会计算简单的 n 阶行列式”这一基本要求，对于计算行列式的技巧毋需作过多的探求.

释疑解难

问 1.1 行列式与行列式的值有什么区别？

答 这是一个“形式”与“内涵”的问题. 以二阶行列式为例. 式子$\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}$叫做二阶行列式，它表示一个数

$$xv - yu,$$

这个数叫做二阶行列式的值，并记作

$$\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = xv - yu.$$

注意上式中的等号是“记作”的意思，但由于等号通常理解为两边的数相等，因此上式左边的行列式记号也就表示行列式的值. 两个行列式相等是指它们的值相等.

由于行列式记号既表示行列式，又表示它的值，因此教材中没有明确提出“行列式的值”这一名称，把“行列式的值”也叫做“行列式”.

问 1.2 如何理解行列式的定义？

答 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的定义

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 此定义中应注意几点：

(1) 和式记号$\sum$是对集合 $P=\{p_1p_2\cdots p_n \mid p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列$\}$作和，因 n 个不同元素的排列数是 $n!$，于是该和式共有 $n!$ 项；

(2) 和式中的每一项都是取自 D 中不同行、不同列的元素之积. 由排列知识知，D 中这样不同行、不同列的 n 个元素之积共有 $n!$ 个.

(3) 和式中每一项 σ 都带有符号 $(-1)^t$，t 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，即根据此排列的逆序数为偶数或奇数，σ 依次取“+”或“−”. 根据排列的性质，和式中各有$\frac{n!}{2}$项取“+”和取“−”.

由上所述可知，n 阶行列式 D 恰好是它的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，是一个“积和式”，其中一半带有正号，一半带有负号.

问 1.3 (1) 余子式与代数余子式有什么特点？(2) 它们之间有什么联系？

答 (1) 设 $D=\det(a_{ij})$，因 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 都是在 D 中画去了第 i 行、第 j 列（从而也就画去了 a_{ij}）后计算而得，故它们仅与位

置(i,j)有关,而与(i,j)元的数值无关.

(2) 它们间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$,因而当 $i+j$ 为偶数时,二者相同;当 $i+j$ 为奇数时,二者符号相反.它们间的关系也可用图示为

$$\begin{pmatrix} + & - & & & \\ - & + & - & \ddots & \\ & - & + & & \\ & & & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{pmatrix},$$

其中,符号"+"表示对应位置上 $A_{ij}=M_{ij}$;符号"-"表示对应位置上 $A_{ij}=-M_{ij}$.上图的规律可简单地归结为:对角线上为正,正的"邻居"为负,负的"邻居"为正.

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

例 6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

析 本例意在学习依次对换行(列)技巧,其特点是:当把第 n 行换到第一行时,原来的第一行、第二行……第 $n-1$ 行依次换到第二行、第三行……第 n 行,亦即这些行的先后次序保持不变.有读者问:直接将第一行与第 n 行、第二行与第 $n-1$ 行……对换使之成为上三角形行列式岂不更方便?当然可以这样做,但要面临对换次数和 n 两方面的奇偶性的讨论,这相当于要对 $n=4k+i$ $(i=0,1,2,3)$作讨论,实际上反而要困难.此例结果也可直接引用.

例 7 例 7(续) 计算

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}.$$

析 这行列式的特点就在于它没有任何特殊之处,因而其求解方法也最具普遍意义.例 7 中,把 D 化成上三角形行列式.例 7(续)中,把 D 按行(或列)展开.因第三行元素的数值较简单,故按第三行展开.为减少展开式中非零项的项数,先利用行列式性质,把第三行除元素 a_{33}之外全化成 0,使展开式中只有一项.这两种方法是行列式计算的基本方法,要熟练掌握.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}.$$

析 本例中 D 属于一类重要的行列式,在后继内容中会多次遇到此类行列式,其特点是对角元相同,并且非对角元也相同.它的一般形式为教材习题8(2),可以用多种方法计算其值,但最基本也最方便的方法就是本例介绍的,即利用各列(行)元素之和相等,把各行(列)同时加到第 1 行(列).

例 12 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

析 (1) 应注意教材中把 D_n 降阶的技巧:从第 n 行开始,后行减前行的 x_1 倍.如果进行相反方向的运算,即从第 2 行开始,后行减前行的若干倍,则无法得到关于 D_n 的递推公式.

(2) 范德蒙德行列式看做 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,有三个特点:

(i) 从列的角度看,第 j 列元素从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂……$(n-1)$次幂,$j=1,2,\cdots,n$;

(ii) 从行的角度看,第 i 行(i,k)元是变元 x_k 的$(i-1)$次幂,$k=1,2,\cdots,n$,$i=1,2,\cdots,n$;

(iii) 从结果看,范德蒙德行列式是以所有可能的足标大的变元与足标小的变元之差作为因子的乘积.

例 13 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的(i,j)元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij}和A_{ij},求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}\text{及 } M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

析 本例的目的是熟悉代数余子式(或余子式)的性质以及行列式的按行(或按列)展开.以求 $\sigma=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$为例.

(1) 如果直接用代数余子式定义,那么要计算 4 个三阶行列式,显然计算量比较大.

(2) 代数余子式 A_{ij}的特点是它与D 的(i,j)元的数值无关.因此,与其说 D 的(i,j)元 a_{ij}对应着A_{ij},倒不如说 D 的(i,j)元所在的位置(i,j)对应着 A_{ij}.由此可知,和式 σ 与D 的第一行元素无关.令

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

则 D_1 与 D 的第一行元素的代数余子式是相同的,即 A_{1j}也是D_1 的$(1,j)$元的代数余子式,从而和式 σ 恰好是D_1 按第一行的展开式:

$$\sigma=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=D_1.$$

二、例题增补

例 1.1 由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式定义,$f(x)$是这个行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和(记为 D),它是关于 x 的至多 4 次的多项式.因行列式中每个元素至多是 x 的一次多项式,于是

σ 是D 中的 x^4 项

$\Leftrightarrow\sigma$ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素

$\Leftrightarrow\sigma$ 是D 的(1,1)、(2,2)、(3,3)、(4,4)元之积

$\Leftrightarrow\sigma=2x^4$(容易知道该项的符号为正);

σ 是D 中的 x^3 项

$\Leftrightarrow\sigma$ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素,而余下一行、一列的元素(已惟一确定)是常数

$\Leftrightarrow\sigma$ 是D 的(1,2)、(2,1)、(3,3)、(4,4)元之积

$\Leftrightarrow\sigma=-x^3$ (容易知道该项的符号为负).

例 1.2 计算五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解一 利用各行的元素之和相同的特点,把除第 1 列以外的各列加到第 1 列,得

$$D=\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2 \\ r_2-r_1]{r_5-r_4 \\ r_4-r_3}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

对上式最后一个行列式作变换:把各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子 -1,得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 4 列展开}}15\begin{vmatrix}0&0&-5\\0&-5&0\\-5&0&0\end{vmatrix}=1875.$$

解二 从 D 的最后一行开始,后行减去前行,得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&-4\\1&1&1&-4&1\\1&1&-4&1&1\\1&-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4,5]{c_i-c_1}\begin{vmatrix}1&1&2&3&4\\1&0&0&0&-5\\1&0&0&-5&0\\1&0&-5&0&0\\1&-5&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{5}c_i}\begin{vmatrix}a&1&2&3&4\\0&&&&-5\\\vdots&&&-5&\\&&-5&&\\0&-5&&&\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}a\begin{vmatrix}&&&-5\\&&-5&\\&-5&&\\-5&&&\end{vmatrix}$$

$$=a\times(-5)^4,$$

其中 $a=1+\dfrac{1+2+3+4}{5}=3$,所以 $D=1875$.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&1&\cdots&1\\1&a_2&&0\\\vdots&&\ddots&\\1&0&&a_n\end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解一 有些书称这个行列式为爪形行列式.通过把 D 的第 1 行中除(1,1)元 a_1 外其他元素均变成为零,化 D 为下三角形行列式,具体如下:

$$D\xlongequal[r_1-\frac{1}{a_n}r_n]{\substack{r_1-\frac{1}{a_2}r_2\\\cdots}}\begin{vmatrix}b&&&\\&a_2&&0\\&&a_3&\\&*&&\ddots\\&&&&a_n\end{vmatrix}=ba_2a_3\cdots a_n\text{[注]},$$

[注] 在行列式的计算中,我们常用“*”表示那里可能有一些非零元素,但对行列式的值没有影响;用 0 表示那里的元素都是零.

其中，$b = a_1 - \frac{1}{a_2} - \cdots - \frac{1}{a_n}$，于是，$D = a_2 a_3 \cdots a_n \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$.

解二 把 D 按第1行展开，由代数余子式

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 1 & & & a_{j-1} & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & a_{j+1} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 } j-1 \text{ 行展开}} - a_2 \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n \quad (j = 2, 3, \cdots, n)$$

得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_j},$$

例 1.4 利用范德蒙德行列式计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}.$$

解 $D \xlongequal[r_4 \div (a+b+c+d)]{r_4 + r_1} (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

把上式等号右边的行列式的最后一行依次与前面的行交换，共交换3次，得

$$D = -(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},$$

此为4阶范德蒙德行列式，根据例12的结果，得

$$D = -(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

例 1.5 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

解 首先,我们恒可假设 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n+1$.因若有某一 $a_i=0$,例如 $a_{n+1}=0$,则将 D_{n+1}按它的第 $n+1$ 行展开,得到 $D_{n+1}=b_{n+1}^n D_n$;若 D_n 中诸 a_i 均不为零,则已如我们之假设;不然,对 D_n 作相同的讨论.其次考察此行列式,它的第 i 行元素是 a_i、b_i 的 n 次齐次函数,于是从第 i 行提取因子 a_i^n($i=1,2,\cdots,n+1$)后,第 i 行、第 j 列元素成为 $\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{j-1}$($j=1,2,\cdots,n+1; i=1,2,\cdots,n+1$),即有

$$D_{n+1}=a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix},$$

上式等号右边的行列式为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式之转置行列式,因此

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}(a_i b_j - a_j b_i). \end{aligned}$$

习题解答

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$

$-1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-0\times1\times3=-4$;

(2) 原式 $=acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3$

$=3abc-a^3-b^3-c^3$;

(3) 原式 $=1\cdot b\cdot c^2+1\cdot c\cdot a^2+1\cdot a\cdot b^2-1\cdot b\cdot a^2-1\cdot c\cdot b^2-1\cdot a\cdot c^2$

$=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2$

$=c^2(b-a)+ab(b-a)-c(b^2-a^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) 原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-(x+y)^3-x^3-y^3$

$=-2(x^3+y^3)$.

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;　　(2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1;　　(4) 2 4 1 3;

(5) 1 3 … $(2n-1)$ 2 4 … $(2n)$;

(6) 1 3 … $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ … 2.

解 (1) 此排列为标准排列,其逆序数为0;

(2) 此排列的首位元素4的逆序数为0,第2位元素1的逆序数为1,第3位元素3的逆序数为1,末位元素2的逆序数为2,故它的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 此排列的前两位元素的逆序数均为0,第3位元素2的逆序数为2;末位元素1的逆序数为3,故它的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 类似于上面,此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为0,0,2,1,故它的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 注意到这 $2n$ 个数的排列中,前 n 位元素的逆序数均为0.第 $n+1$ 位元素2与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对,故它的逆序数为 $n-1$;同理,第 $n+2$ 位元素4的逆序数为 $n-2$……末位元素 $2n$ 的逆序数为0.故此排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$;

(6) 与(5)相仿,此排列的前 $n+1$ 位元素的逆序数均为0;第 $n+2$ 位元素 $(2n-2)$ 的逆序数为2;第 $n+3$ 位元素 $2n-4$ 与它前面的 $2n-3,2n-1,2n,2n-2$ 构成逆序对,故它的逆序为4……末位元素2的逆序数为 $2(n-1)$,故此排列的逆序数为 $2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 由行列式定义知这项必还含有分别位于第3行和第4行的某两元素,而它们又分别位于第2列和第4列,即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42}.注意到排列1324

与 1342 的逆序数分别为 1 与 2，故此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解　(1)

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

$=0$（因第 3、4 行成比例）；

(2) $D \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$（因有两行相同）；

(3) $D \xlongequal[\substack{r_2 \div d \\ r_3 \div f}]{r_1 \div a} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2 \div c \\ c_3 \div e}]{c_1 \div b} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef;$$

(4) $D\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&1&1\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}=0;$

(5) $D\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}(-1)(-1)^3\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_3+dc_2}\begin{vmatrix}1+ab&a&ad\\-1&c&1+cd\\0&-1&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}r_3\text{展开}}(-1)(-1)^5\begin{vmatrix}1+ab&ad\\-1&1+cd\end{vmatrix}$

$=(1+ab)(1+cd)+ad.$

(6) $D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\div(-1)]{\text{按}c_1\text{展开}}-\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\1&1&1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2-c_1}-\begin{vmatrix}1&0&-3\\2&-4&-2\\1&0&1\end{vmatrix}$

$=4\begin{vmatrix}1&-3\\1&1\end{vmatrix}=16.$

注 本题中哪怕是求三阶或四阶行列式都运用了行列式的各种基本的计算手段,请读者留意.

5. 求解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$,其中 a,b,c 互不相等.

解 (1) 左式$\xlongequal[r_1\div(x+3)]{r_1+r_2}(x+3)\begin{vmatrix}1&1&0\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2-c_1}(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3).$$

于是方程的解为 $x_1=-3, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$；

（2）注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式，由例 12 的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

因 a,b,c 互不相等，故方程的解为 $x_1=a, x_2=b, x_3=c$.

6．证明：

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

（2）$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

（4）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$；

（5）$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

证 （1）左式 $\xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_3}\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_2}\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=(a-b)^3=$ 右式；

（2）将左式按第 1 列拆开得

$$\text{左式}=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=aD_1+bD_2,$$

其中
$$D_1=\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_3\div a]{c_3-bc_1}a\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2\div a]{c_2-bc_3}a^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\div b]{c_2-ac_1}b\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3\div b]{c_3-ac_2}b^2\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_1]{c_3\leftrightarrow c_2}b^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

于是
$$D=aD_1+bD_2=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右式}.$$

(3) $\text{左式}\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\text{ (因有两列相同)};$$

(4) $\text{左式}\xlongequal[\substack{r_3-ar_2\\r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{各列提取公因子}]{\text{按 }c_1\text{ 展开}}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&x&y\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b&d-b\\x&y\end{vmatrix},$$

其中$x=c^2(c+a)-bc(b+a)=c(c^2+ac-b^2-ab)=c(a+b+c)(c-b)$,

$y=d^2(d+a)-bd(b+a)=d(a+b+d)(d-b)$.

故 $$\begin{vmatrix}c-b&d-b\\x&y\end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c(a+b+c)&d(a+b+d)\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)(d-b)[d(a+b+d)-c(a+b+c)]$$

$$=(c-b)(d-b)[(d-c)(a+b)+d^2-c^2]$$

$$=(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d),$$

因此,左式$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)=$右式.

(5) **证一** 按第 1 列展开得

$$D=x\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}-a_0\begin{vmatrix}-1&0&0\\x&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}$$

$$=x\left(x\begin{vmatrix}x&-1\\a_2&a_3\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}-1&0\\x&-1\end{vmatrix}\right)+a_0$$ (对上式第 1 个行列式继续按第 1 列展开)

$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0;$$

证二 按最后一行展开得

$$D=-a_0\begin{vmatrix}-1&0&0\\x&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}x&0&0\\0&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}$$

$$-a_2\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&0\\0&0&-1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\0&0&x\end{vmatrix}$$

$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

7. 设 n 阶行列式$D=\det(a_{ij})$,把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转,依次得

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{n1}&\cdots&a_{nn}\\\vdots&&\vdots\\a_{11}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\\vdots&&\vdots\\a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3=D$.

证 (1) 通过对换行将 D_1 变换成 D,从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第1行,把它依次与前面的行交换,直至换到第1行,共进行 $n-1$ 次交换;这时最后一行是 D 的第2行,把它依次与前面的行交换,直至换到第2行,共进行 $n-2$ 次交换……直至最后一行是 D 的第 $n-1$ 行,再通过一次交换将它换到第 $n-1$ 行,这样就把 D_1 变换成 D,共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

次交换,故 $D_1=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

注 上述对换行(列)的方法,在解题时经常用到.它的特点是在把最后一行换到某一行的同时,保持其余 $n-1$ 个行之间原有的先后次序(但行的序号可能改变),见例6之析.

(2) 计算 D_2.注意到 D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 行恰好依次是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,故若把 D_2 上下翻转得 $\widetilde{D}_2$,则 $\widetilde{D}_2$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次是 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 列,即 $\widetilde{D}_2=D^{\mathrm{T}}$.于是由(1)

$$D_2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D^{\mathrm{T}}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D.$$

(3) 计算 D_3.注意到若把 D_3 逆时针旋转90°得 $\widetilde{D}_3$,则 $\widetilde{D}_3$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 列恰好是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,于是再把 $\widetilde{D}_3$ 左右翻转就得到 D.由(1)之注及(2),有

$$D_3=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_3=D.$$

注 本例的结论值得记取,即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转180°所得行列式不变,作上下翻转、左右翻转、逆(顺)时针旋转90°所得行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$,其中对角线上元素都是 a,未写出的元素都是0;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

提示:利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0;

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(6) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

(1) **解一** 化 D_n 为上三角形行列式

$$D_n \xlongequal{r_n+r_1} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ a+1 & & a+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_n} \begin{vmatrix} a-1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & a+1 \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1),$$

上式中最后那个行列式为上三角形行列式;

解二 把 D_n 按第二行展开,因 D_n 的第二行除对角线元素外全为零,故有

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \text{即 } D_n = aD_{n-1},$$

于是有
$$D_n = aD_{n-1} = \cdots = a^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1);$$

(2) 本题中 D_n 是教材例8中行列式的一般形式,它是一个非常有用的行列式,在以后各章中有不少应用.

解　利用各列的元素之和相同,把从第二行起的各行统统加到第一行再提取公因式.

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - ar_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a];$$

(3) **解**　把所给行列式上下翻转,即为范德蒙德行列式,若再将它左右翻转,由于上下翻转与左右翻转所用交换次数相等,故行列式经上下翻转再左右翻转(相当于转180°,参看题7)其值不变.于是按范德蒙德行列式的结果,可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j);$$

(4) **解**　本题与例11相仿,解法也大致相同,用递推法.

$$D_{2n} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_{2n}]{r_2 \leftrightarrow r_{2n}} \left|\begin{array}{cc:c} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & D_{2(n-1)} \end{array}\right| \xlongequal{\text{由例 10}} (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

即有递推公式

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}.$$

另一方面,归纳基础为 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$,利用这些结果,递推得

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{k=1}^{n} (a_k d_k - b_k c_k);$$

(5) **解** 把所有的行(第一行除外)都加到第一行,并提取第一行的公因子,得

$$D_n = (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1 + a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n - c_1}]{c_2 - c_1} (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n;$$

(6) **解**

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_{n-1} - r_{n-2} \\ \cdots \\ r_2 - r_1}]{r_n - r_{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2 + c_n \\ \cdots \\ c_{n-1} + c_n}]{c_1 + c_n} \begin{vmatrix} n-1 & n & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2};$$

(7) **解** 将原行列式化为上三角形行列式. 为此,从第 2 行起,各行均减去第 1 行,得与例 1.3 相仿的行列式

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+\frac{a_1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $b = 1 + a_1 + a_1\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} = a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$. 于是

$$D_n = a_1\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

9. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, D 的(i,j)元的代数余子式记作 A_{ij},求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

解 与例13相仿,$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$等于用1,3,-2,2替换 D 的第3行对应元素所得行列式,即

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按 } c_4 \text{ 展开}]{r_2\div(-2)} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=24.$$

习题1(附答案和提示)

1.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1823 & 823 & 23 & 3\\ 1549 & 549 & 49 & 9\\ 1667 & 667 & 67 & 7\\ 1986 & 986 & 86 & 6\end{vmatrix}.$$

1.2　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}.$$

1.3　求满足下列方程的实数 x,y,z:

$$\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ x & 1 & 0 & 0\\ y & 0 & 1 & 0\\ z & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

1.4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0 & -1 & & & \\ b_1 & a_1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & -1\\ b_{n-1} & & & & a_{n-1}\end{vmatrix}\quad(\text{未标明元素均为零}).$$

1.5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}.$$

1.6　已知多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+1 & 2 & x-3 & 2\\ 1 & 2x+2 & 7 & 5\\ 3x+1 & 3 & 3x+3 & 8\\ 1 & 8 & 0 & 4x+4\end{vmatrix},$$

求 $f(x)$的最高次项.

答案和提示

1.1　-4×10^7.

1.2 $D=a^2b^2$.

1.3 提示:将 D 按第一行展开,得 $x^2+y^2+z^2=0$,解得 $x=y=z=0$.

1.4 $D_n=a_0a_1\cdots a_{n-1}+b_1a_2\cdots a_{n-1}+\cdots+b_{n-2}a_{n-1}+b_{n-1}$.

1.5 $1+\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

1.6 $112x^3$.

第2章

矩阵及其运算

基 本 要 求

1. 理解矩阵的概念,知道零矩阵、对角矩阵、单位矩阵、对称矩阵等特殊的矩阵.

2. 熟练掌握矩阵的线性运算(即矩阵的加法及矩阵与数的乘法)、矩阵与矩阵的乘法、矩阵的转置、方阵的行列式以及它们的运算规律.

3. 理解可逆矩阵的概念、性质以及矩阵可逆的充要条件.理解伴随矩阵的概念和性质,会用伴随矩阵求矩阵的逆矩阵.

4. 知道克拉默法则.

5. 知道分块矩阵及其运算规律.熟悉矩阵的行向量组和列向量组.

内 容 提 要

1. 矩阵的定义与记号

$m\times n$ 矩阵,记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.矩阵的第 i 行、第 j 列元素称为该矩阵的 (i,j) 元;以 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.

n 阶矩阵(或 n 阶方阵)记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_n$.列矩阵(或称列向量)常用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}$ 表示,行矩阵(或称行向量)常用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 表示.

零矩阵记作 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$,以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角线元素的 n 阶对角阵也可记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,单位阵记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$.

2. 矩阵的运算及运算规律

(1) 矩阵的加法满足:

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(2) 数乘矩阵满足(其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$):

(i) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

(3) 矩阵与矩阵相乘满足(设运算都是可行的):

(i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(ii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$;

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB})$.

需特别注意:矩阵乘法(i)不满足交换律,即一般情况下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故矩阵乘法有左乘和右乘之分;

(ii) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(4) 矩阵的转置满足:

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(iv) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为对称阵的充要条件是 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

(5) 方阵的幂和方阵的多项式.

设 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 为 λ 的 m 次多项式,记

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$

$\varphi(\boldsymbol{A})$称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

方阵的幂和多项式满足运算规律:

(i) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$, $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}\ (k,l\in\mathbb{Z}_+)$;

(ii) 设 $\varphi(\boldsymbol{A})$, $f(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个多项式,则 $\varphi(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{A})$.

因此,方阵的多项式可以像数的多项式一样分解因式.

(6) 方阵的行列式满足:

(i) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(ii) $|\lambda\boldsymbol{A}_n|=\lambda^n|\boldsymbol{A}_n|$;

(iii) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

3. 逆矩阵

(1) 定义　对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 若有方阵 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,并记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0$

$\Leftrightarrow$存在方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow$存在方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

(3) 逆矩阵的性质

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆,且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$也可逆,且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(iii) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$k\neq 0$,则 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆,且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(iv) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆,且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4) 伴随矩阵

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵$\boldsymbol{A}^*$定义为

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}.$$

其中 A_{ij}是行列式$|\boldsymbol{A}|$中(i,j)元的代数余子式.

伴随阵具有下述性质:

(i) $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

(ii) 若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

4. 克拉默法则

含 n 个未知数 n 个线性方程的方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时有惟一解,且解为 $x_i=\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$,这里 $\boldsymbol{A}_i$ 是把$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列换成$\boldsymbol{b}$ 所得 n 阶方阵,$i=1,2,\cdots,n$.

5. 分块矩阵

用一些横线和竖线把矩阵分成若干小块,这种“操作”称为对矩阵进行分块;矩阵分块后,以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵,分块矩阵在运算时,可以把每个小块看作“数”来运算.

学 习 要 点

矩阵是本课程研究的主要对象,也是本课程讨论问题的主要工具.因此,本章所述矩阵的概念及其运算都是最基本的,应切实掌握.矩阵的线性运算(即矩阵的加法和数乘)是容易掌握的.需要重点关注的是矩阵乘法和逆矩阵的概念.矩阵乘法除需熟练掌握外,还需理解它不满足交换律及消去律,明了由此特性带来的不同于实数乘法的运算规则.要理解逆矩阵的概念,熟悉矩阵可逆的条件,知道伴随矩阵的性质及利用伴随矩阵求逆矩阵的公式.知道分块矩阵的概念,着

重了解按列分块矩阵和按行分块矩阵的运算规则,对于利用分块法简化矩阵运算的技巧,不必追求.

释疑解难

问 2.1 矩阵运算与我们熟悉的实数运算的本质区别是什么?

答 两者的一些本质区别在于:

(1) 实数乘法是可交换的,而矩阵乘法是不满足交换律的,这表现在:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘,但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 未必可乘;$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 为 m 阶矩阵,$\boldsymbol{B}_{n\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 为 n 阶矩阵,当 $m\neq n$ 时 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$;即使 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,$\boldsymbol{AB}$ 也未必等于 $\boldsymbol{BA}$.
例如取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\text{而 }\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

正缘于此,矩阵的乘法就有 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{BA}$)与 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{AB}$)之分.

(2) 由(2.1)式可知,即使 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但它们的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也仍可能是零矩阵.这种情况在实数运算中是不可能发生的.因为若有 $ab=0$,$a,b\in\mathbb{R}$,则 a,b 中至少有一个是零.

(3) 在实数运算中,若有 $ax=0$ 且 $a\neq0$,则必有 $x=0$;等价地,若有 $ax=ay$ 且 $a\neq0$,则有 $x=y$,即 a 可从等式两边消去.(2.1)式表明,若矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,并不能得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$;等价地,若有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,并不能把 $\boldsymbol{A}$ 从等式两边消去,得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.不过,若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵且 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,按克拉默法则,则由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$,可得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$,这表明矩阵乘法消去律成立的条件与实数乘法也不一样.教材在第3章中给出了(当 $\boldsymbol{A}$ 不一定是方阵时)由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 可推出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵.

问 2.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵($n\geqslant2$),下列等式是否正确?为什么?

(1) $|k\boldsymbol{A}|=|k||\boldsymbol{A}|$; (2) $(k\boldsymbol{A})^*=k\boldsymbol{A}^*$ $(k\neq0)$.

答 (1) 不正确.由方阵的行列式的性质知道 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

(2) 不正确.因由伴随矩阵的定义

$(k\boldsymbol{A})^*$ 的 (j,i) 元 = 矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 中 (i,j) 元的代数余子式

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^{n-1}A_{ij},$$

所以
$$(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

问 2.3 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有什么重要的性质?

答 (1) 基本性质 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$,$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$(这里 n 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数,见习题 24);

(4) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$,$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

问 2.4 称一个行列式不等于零的方阵为非奇异矩阵有什么缘由? 可逆矩阵或非奇异矩阵有什么重要意义?

答 奇异一词由英语 singular 译来,意为异常的,独一无二的. 如果我们定义实数 a 是可逆的:存在实数 b,使 $ab(=ba)=1$,那么所有非零数 a 均可逆,且其逆为其倒数:$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$;0 是独一无二的不可逆的实数,因而它就显得奇异. 另一方面,方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$. 与实数的情形对照起来,行列式等于零的矩阵也就称为奇异.

可逆矩阵或非奇异矩阵是线性代数中最重要和最基本的概念之一,这里把它与实数的情形作一比较,以加深对它的理解:

实数集合$\mathbb{R}$	n 阶矩阵集合 M_n
元素 a 可逆⇔存在 b,使 $ab=ba=1$ ⇔$a\neq 0$ ⇔存在 b,使 $ab=1$	元素 $\boldsymbol{A}$ 可逆⇔存在 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ ⇔$\det \boldsymbol{A}\neq 0$ ⇔存在 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$

如果把实数 1 称为$\mathbb{R}$中乘法的"单位元素",把单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 称为 M_n 中乘法的"单位元素",并把两者对应起来;同时把$\mathbb{R}$中非奇异元素 $a\neq 0$ 对应于 M_n 中非奇异元素 $\boldsymbol{A}$:$\det \boldsymbol{A}\neq 0$,则从运算角度抽象地看,二者是没有什么差别的(这里 M_n 表示 n 阶方阵全体).

正如实数方程 $ax=b$,当 $a\neq 0$ 时有解 $x=a^{-1}b=\frac{b}{a}$一样,可逆矩阵的一个最直接的应用就是求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时,它有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.另一方面,也应看到矩阵是一个数表,远比一个数复杂,所以当 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵甚至不是方阵时,仍可讨论方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解(见第3章).

问 2.5 矩阵与行列式有什么区别与联系?

答 矩阵的记号(数表外加括号)与行列式记号(数表外加竖线)很相像,但它们是两个截然不同的概念,不要混淆,更不要随意混用.矩阵是一个数表,而行列式则是一个数.另一方面,方阵与它的行列式又是紧密相关的.方阵确定了它的行列式;而行列式又是方阵特性的重要标志.如问2.4所述,根据行列式是否为0把方阵划分为奇异与非奇异两类,这样的分类具有基本而深刻的意义.第3章中将要把方阵的行列式这一概念推广为矩阵的 k 阶子式的概念,用以揭示出矩阵更深刻的特性.

问 2.6 矩阵多项式有什么意义?

答 (1) 设有 x 的 m 次多项式

$$\varphi(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0,$$

当 x 用 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 替代时,就成为矩阵多项式

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}.$$

(注意常数项 a_0被替代成 $a_0\boldsymbol{E}$.)它满足:

(i) $\varphi(\boldsymbol{A})$也是 n 阶矩阵;

(ii) 设 $\varphi(\boldsymbol{A})$和 $\psi(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的两个矩阵多项式,尽管矩阵乘法不满足交换律,但 $\varphi(\boldsymbol{A})$与 $\psi(\boldsymbol{A})$总是可交换的,即

$$\varphi(\boldsymbol{A})\psi(\boldsymbol{A})=\psi(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{A}),$$

从而熟知的普通多项式的乘法规则和因式分解规则,对于矩阵多项式也成立,如

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^m=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{A}^k.$$

(2) 就像实数多项式是最重要、最基本的函数之一,矩阵多项式也是线性代数的重要而基本的内容.教材中仅介绍了矩阵多项式的一种特殊的计算法,即

(i) 若 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,则 $\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n))$;

(ii) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$,则 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}$.

问 2.7 对角阵和分块对角阵在运算上有什么特性?

答 为简洁见,以二阶对角阵为例.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&\\&a_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&\\&b_2\end{pmatrix}$,那么

(1) $|A| = a_1a_2$；　(2) $AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \\ & a_2b_2 \end{pmatrix}$，特别 $A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & \\ & a_2^k \end{pmatrix}$；

(3) A 可逆$\Leftrightarrow a_1a_2 \neq 0$，且当 A 可逆时 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \\ & \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}$.

可见对角阵的运算比较简单，它们更接近于数的运算.

对于分块对角阵也不妨以对角线上两个子块为例，设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}$，其中 A_1 与 B_1 同阶，A_2 与 B_2 同阶，那么

(1) $|A| = |A_1||A_2|$；　(2) $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & \\ & A_2B_2 \end{pmatrix}$，特别 $A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & \\ & A_2^k \end{pmatrix}$；

(3) A 可逆$\Leftrightarrow A_1$ 和 A_2 都可逆，且当 A 可逆时 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}$.

可见分块对角阵运算时把对角线上子块当作数，按对角阵的运算性质进行适当延伸就可以了.

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

例 7　**析**　把线性方程组写成矩阵形式 $Ax = b$（齐次方程为 $Ax = 0$）是以后讨论线性方程组的基础和出发点，它与一元一次方程 $ax = b$（a, b 为数）在形式上相一致.

例 9　设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 满足 $X^TX = 1$，E 是 n 阶单位矩阵，$H = E - 2XX^T$，证明 H 是对称阵，且 $HH^T = E$.

析　(1) 当 X 为 $n \times 1$ 的列矩阵时，XX^T 为 n 阶方阵，而 X^TX 是一阶方阵，也就是一个数；

(2) 因为矩阵 XX^T 与 E 可交换，所以

$$(E - 2XX^T)^2 = E - 4XX^T + 4(XX^T)^2,$$

又因矩阵乘法满足结合律，所以

$$(XX^{\mathrm{T}})^2=(XX^{\mathrm{T}})(XX^{\mathrm{T}})=X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}=X1X^{\mathrm{T}}=XX^{\mathrm{T}}.$$

例 12 求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

析 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 来计算时,计算量较大,较容易出错.本例给出一个“标准程序”,值得仿效.注意它是计算 M_{ij},而不直接算 A_{ij},这有助于减少出错.

例 14 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

例 15 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}$.

析 这两例是关于方阵的幂或多项式的计算.它们的方法往往不是直接计算 $\boldsymbol{A}$ 的幂或多项式,而是如这两例所介绍的方法:先把 $\boldsymbol{A}$ 通过可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 联系起来,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}&\Rightarrow\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\&\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

上式表明,当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$时,$\boldsymbol{A}$ 的幂和多项式可经由对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的同一幂和同一多项式来计算,而后者的计算,如教材所示,是非常容易的.

例 16 分别用克拉默法则和逆矩阵方法求解线性方程组.

析 求解系数矩阵为可逆方阵的线性方程组可用三种方法:(1) 克拉默法则;(2) 逆矩阵方法;(3) 初等行变换方法(第 3 章).克拉默法则的特点是用行列式给出每个未知数的解的表达式,在处理某些问题时有其独到之处,但其缺点是计算量太大,如当 $n=5$ 时需要求六个 5 阶行列式.从历史上看,克拉默法则是 1750 年提出的,而后两种方法则远在 100 年后即 1850 年才出现,它们的简单和先进是理所当然的.

二、例题增补

例 2.1 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,并求其逆.

解 由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+(k-1)\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$,取 $k=2$,有

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E},$$

于是

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E}.$$

由矩阵可逆的充要条件(定理 2 的推论),知矩阵 $A-E$ 可逆,且

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E).$$

注　对于类似于本例的问题,往往用类似于数的多项式的乘法或因式分解,对矩阵多项式乘适当的因式或作因式分解,利用定理 2 的推论可以同时解决逆矩阵的存在性及表达式.

例 2.2　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$n\geqslant 2$ 为正整数,求 A^n-2A^{n-1}.

解　因 $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A$,即 A 满足 $A^2=2A$,利用此关系式得

$$A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=A^{n-2}O=O.$$

注　本例是方阵求幂问题.方阵求幂大致有两种方法.一是根据所给矩阵 A,找出 A 所满足的关系式(如本例及下例);或通过具体计算 A^2,A^3等,找出求 A 的幂的规律(习题 6).另一种,也是更主要的,是如教材例 14 和例 15 所用的方法.

例 2.3　已知 $\alpha=(1,2,3)^{\mathrm T}$,$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm T}$.又,方阵 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$,求 A^n.

解　由方阵幂的定义有

$$A^n=\underbrace{(\alpha\beta^{\mathrm T})(\alpha\beta^{\mathrm T})\cdots(\alpha\beta^{\mathrm T})}_{n\text{个}}.$$

把上式看做 $2n$ 个矩阵的乘积,使用结合律,得

$$A^n=\alpha\underbrace{(\beta^{\mathrm T}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm T}\alpha)}_{(n-1)\text{个}}\beta^{\mathrm T}.$$

注意到矩阵 $\beta^{\mathrm T}\alpha$ 是一个 1×1 的矩阵,也即是一个数,$\beta^{\mathrm T}\alpha=3$,根据矩阵数乘的运算规则,有

$$A^n=\alpha 3^{n-1}\beta^{\mathrm T}=3^{n-1}\alpha\beta^{\mathrm T}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

例 2.4　设 A 是 n 阶非零方阵,且满足 $A^*=A^{\mathrm T}$.证明 $|A|\neq 0$.

证　把题设条件 $A^*=A^{\mathrm T}$代入公式 $A^*A=|A|E$ 中,得 $A^{\mathrm T}A=|A|E$.为

证$|A|\neq0$,用反证法:若$|A|=0$,则 $A^{T}A=O$,根据例19的结论知 A 为零矩阵,此与题设 A 为非零矩阵矛盾,故$|A|\neq0$.

例 2.5　设矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$,其中矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,$E$ 为3阶单位阵,求 X.

解　由题设矩阵方程

$$\begin{aligned}&AX(A-B)+BX(B-A)=E\\ \Rightarrow&AX(A-B)-BX(A-B)=E\\ \Rightarrow&(A-B)X(A-B)=E,\end{aligned}\tag{2.2}$$

由于$|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq0$,故 $A-B$ 可逆,且

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是,用$(A-B)^{-1}$分别左乘、右乘(2.2)式的等号两边,得

$$X=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.6　设矩阵 X 满足

$$A^{*}X=A^{-1}B+2X,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,求矩阵 X.

解　因$|A|=4$,A 为可逆矩阵,故 $A^{*}=|A|A^{-1}=4A^{-1}$,代入矩阵方程得

$$\begin{aligned}&4A^{-1}X=A^{-1}B+2X\\ \Rightarrow&4X=B+2AX\quad(\text{用 } A \text{ 左乘上式两边})\\ \Rightarrow&2(2E-A)X=B.\end{aligned}$$

因 $2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$是可逆矩阵,且$(2E-A)^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,

用$(2E-A)^{-1}$左乘上式等号两边,得

$$2X=(2E-A)^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}B$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

注 本例与上例都是求解矩阵方程,因此必须注意在问 2.1 中提出的几点.求解矩阵方程,一般先将方程化简,然后代入具体的元素以求出未知矩阵,这样可以使步骤清晰,计算量减少.

例 2.7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$均为 4 维列向量,行列式 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=m$,$\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=n$.求 $\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$.

解 因所求行列式的第四列元素均是两个数之和,于是可按第四列拆成两个行列式:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)&=\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\\&=-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)+\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=n-m.\end{aligned}$$

例 2.8 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置.证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵.

证 (1) 先计算 $\boldsymbol{A}^2$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(这里应用了矩阵乘法的结合律,并注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数.)

于是 $$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-1=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1.$$

(因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$为非零 n 阶矩阵.)

(2) 由(1)知,此时,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.反证:若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,用 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的两边,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.又由题设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,因而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$,但当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量时,$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 中至少有一个对角元非零,从而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$,此为矛盾.故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 2.9 已知 $2\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{C}^5$.

解 由 $2\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$ 得

$$2\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}.$$

因 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&2&0\\4&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为可逆的分块对角阵，且 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-4&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{C}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{C}^5=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^5(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}3&2&0\\4&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&0\\-4&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&2^5\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-12\\24&-17\end{pmatrix}$.

习题解答

1. 计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；　(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1,2)$；　(4) $\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$；

(5) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}_{3\times1}$；

(2) $(1,2,3)_{1\times3}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}_{3\times1}=(10)_{1\times1}=10$；

(3) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}_{3\times1}(-1,2)_{1\times2}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{pmatrix}_{3\times2}$；

(4) $\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}_{2\times4}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}_{4\times3}=\begin{pmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{pmatrix}_{2\times3}$;

(5) $(x_1,x_2,x_3)_{1\times3}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{3\times1}$

$$=(x_1,x_2,x_3)_{1\times3}\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}_{3\times1}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{12}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{13}x_3x_1+a_{23}x_3x_2+a_{33}x_3^2$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$, 求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}.$$

于是 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&15&24\\0&-15&18\\6&27&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{pmatrix};$$

因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 故

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_3,\\x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\x_3=4y_1+y_2+5y_3,\end{cases}\quad\begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\y_2=2z_1+z_3,\\y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$$

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

解 依次将两个线性变换写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{pmatrix}$ 分别为对应的系数矩阵; $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$. 在这些记号下,从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z},$$

这里矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1&3\\12&-4&9\\-10&-1&16\end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases}x_1=-6z_1+z_2+3z_3,\\x_2=12z_1-4z_2+9z_3,\\x_3=-10z_1-z_2+16z_3.\end{cases}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$,问:

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

解 (1) 因 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$,

但由(1), $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\neq2\boldsymbol{AB}$,从而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2$,但由(1), $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,从而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

5. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解 (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$;

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$;

(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$.

6. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^k$;(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^4$.

解 (1) 直接计算得 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix},$$

一般可得
$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix},\tag{2.3}$$

事实上,当 $k=1$ 时,(2.3)式显然成立,

设当 $k=n$ 时,(2.3)式成立,那么当 $k=n+1$ 时,

$$\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(n+1)\lambda&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法,知(2.3)式成立;

(2) $$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&\\&\lambda&1\\&&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&\\&\lambda&1\\&&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^4&4\lambda^3&6\lambda^2\\&\lambda^4&4\lambda^3\\&&\lambda^4\end{pmatrix}.$$

注 可证 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}=\lambda^{n-2}\begin{pmatrix}\lambda^2&n\lambda&\frac{n(n-1)}{2}\\0&\lambda^2&n\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$ $(n\geqslant 2)$.

7. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{50}$ 和 $\boldsymbol{A}^{51}$;

(2) 设 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=10\boldsymbol{E}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{50}=(\boldsymbol{A}^2)^{25}=(10\boldsymbol{E})^{25}=10^{25}\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{A}^{51}=\boldsymbol{A}^{50}\boldsymbol{A}=10^{25}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=10^{25}\boldsymbol{A}=10^{25}\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix};$$

(2) $\boldsymbol{A}^{100}=\underbrace{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})}_{100个}=\boldsymbol{a}\underbrace{(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\cdots(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})}_{99个}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,

因 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=-8$, 故由上式知 $\boldsymbol{A}^{100}=(-8)^{99}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=-8^{99}\begin{pmatrix}2&4&8\\1&2&4\\-3&-6&-12\end{pmatrix}$.

8. (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称阵;

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵, 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

证 (1) 根据矩阵乘积的转置规则, 有

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ (因\ \boldsymbol{A}\ 为对称阵),$$

故由定义知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称阵;

(2) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$, 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ 为对称阵&\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

9. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}a_1&&&0\\&a_2&&\\&&\ddots&\\0&&&a_n\end{pmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq0)$.

解 (1) 由二阶方阵的求逆公式(教材例11)得

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix};$$

(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

(3) 因 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -32, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix};$$

(4) 因 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$，故 $a_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 于是矩阵 $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$ 是有意义的，并且因

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \operatorname{diag}(1, 1, \cdots, 1) = \boldsymbol{E}_n, \end{aligned}$$

由定理 2 的推论，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$.

注 本题结论值得记取，可当作公式用.

10. 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解 记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，则线性变换的矩阵形式为 $\boldsymbol{x} =$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为它的系数矩阵.因 $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,故 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,于是从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换的矩阵形式为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

又,$\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

于是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{即} \begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

11. 设 $\boldsymbol{J}$ 是元素全为 1 的 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵.证明 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}$ 是可逆矩阵,且 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J})^{-1} = \boldsymbol{E} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J}$,这里 $\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{J}$ 同阶的单位矩阵.

证 因

$$\boldsymbol{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = n\boldsymbol{J},$$

于是 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J})(\boldsymbol{E} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{J} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J} + \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{E} - \dfrac{n}{n-1}\boldsymbol{J} + \dfrac{n}{n-1}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}$,由定理 2 的推论,$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}$ 是可逆矩阵,且 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J})^{-1} = \boldsymbol{E} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J}$.

注 判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,最直接、最简单的方法就是验证 $\boldsymbol{AB}$(或者 $\boldsymbol{BA}$)是否等于单位矩阵,就像判断 3 是否为 $\dfrac{1}{3}$ 的逆,只需验证 $\dfrac{1}{3} \times 3$ 是否等于 1 一样.下两题及例 2.1 都是这一思想的应用.

12. 设 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$ (k 为正整数),证明 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆,并且其逆矩阵 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}$.

证 因
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}) &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 - \cdots - \boldsymbol{A}^k \\ &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{O} = \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

由定理 2 的推论知 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆,且其逆矩阵 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}$.

13. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}, \tag{2.4}$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 都可逆,并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})^{-1}$.

解 先证 $\boldsymbol{A}$ 可逆.由(2.4)式得

$$A(A-E)=2E,$$

也就是
$$A\left(\frac{1}{2}(A-E)\right)=E.$$

由定理 2 的推论知 A 是可逆的,且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$;

再证 $A+2E$ 可逆.由

$$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=2E-6E=-4E,$$

即
$$(A+2E)\left[\frac{1}{4}(3E-A)\right]=E,$$

同理,知 $A+2E$ 可逆,且$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

14. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$;　　(2) $X\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\4 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$;

(4) $AXB=C$,其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

解 (1) 因矩阵$\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$的行列式等于 1,不为零,故它可逆,从而用它的逆矩阵左乘方程两边,得

$$X=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{pmatrix};$$

(2) 记矩阵方程为 $XA_{3\times 3}=B_{2\times 3}$,因

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0,$$

故 A 可逆,用 A^{-1}右乘方程的两边得

$$X=BA^{-1}.$$

又,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}M_{11} & -M_{21} & M_{31}\\-M_{12} & M_{22} & -M_{32}\\M_{13} & -M_{23} & M_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-2 & 3 & -2\\-3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

于是
$$X=BA^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&6&3\\-8&15&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 记 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$,则矩阵方程可写为
$$AXB=C.$$

因 $|A|=6\neq0,|B|=2\neq0$,故 A,B 均可逆.依次用 A^{-1}和 B^{-1}左乘和右乘方程两边得
$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12&12\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}.$$

(4) 因 $|A|=3,|B|=1$,故 A,B 均是可逆矩阵,且
$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

分别用 A^{-1}和 B^{-1}左乘和右乘方程两边得
$$X=A^{-1}CB^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-3&-4\\9&-5&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}23&-7&-13\\-22&5&14\end{pmatrix}.$$

15. 分别应用克拉默法则和逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+2x_2+5x_3=2,\\3x_1+5x_2+x_3=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\x_1+2x_2+4x_3=3,\\x_1+3x_2+9x_3=5.\end{cases}$

解 (1) (i)用克拉默法则

因系数矩阵的行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{vmatrix}=15\neq0$,由克拉默法则,方程组有惟一

解,且

$$x_1=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{vmatrix}=\frac{15}{15}=1,\quad x_2=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&1&3\\2&2&5\\3&3&1\end{vmatrix}=0,$$

$$x_3=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&5&3\end{vmatrix}=0;$$

(ii) 用逆矩阵方法

因 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-23&13&4\\13&-8&1\\4&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}15\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

即有 $x_1=1,x_2=0,x_3=0$;

(2) (i)用克拉默法则

因系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=2\neq0$,由克拉默法则方程组有惟一解,且

$$x_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&4\\5&3&9\end{vmatrix}=\frac{4}{2}=2,\quad x_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&4\\1&5&9\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

$$x_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&5\end{vmatrix}=\frac{1}{2};$$

(ii) 用逆矩阵方法

因 $|\boldsymbol{A}|=2\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$,易求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

代入得
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$,求$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*|$.

解 因$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.于是由
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\text{及 }(2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1},$$
得
$$(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{5}{2}\boldsymbol{A}^{-1}=-2\boldsymbol{A}^{-1},$$
两端取行列式得
$$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*|=|-2\boldsymbol{A}^{-1}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}|^{-1}=-16.$$

注 先化简矩阵,再取行列式,往往使计算变得简单.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

因 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$,它的行列式 $\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2\neq0$,故它是可逆矩阵.用$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$左乘上式两边得
$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&6&6\\-2&4&6\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 由方程 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$,合并含有未知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的项,得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

又,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,其行列式 $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-1\neq0$,故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,用 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$左乘上式两边,即得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

19. 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,-2,1)$,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 由于所给矩阵方程中含有 $\boldsymbol{A}$ 及其伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$,因此仍从公式 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$着手.为此,用 $\boldsymbol{A}$ 左乘所给方程两边,得

$$\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{ABA}-8\boldsymbol{A},$$

又,$|\boldsymbol{A}|=-2\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,用 $\boldsymbol{A}^{-1}$右乘上式两边,得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}\Rightarrow(2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}.$$

注意到 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}(1,-2,1)+\mathrm{diag}(1,1,1)=\mathrm{diag}(2,-1,2)$是可逆矩阵,且

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right),$$

于是

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\mathrm{diag}(2,-4,2).$$

20. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$,且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 先化简所给矩阵方程:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

若能求得 $\boldsymbol{A}$ 并且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,就可解得

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A},\qquad(*)$$

下面计算 $\boldsymbol{A}$.由题意知 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^4$,即$|\boldsymbol{A}|^3=|\boldsymbol{A}^*|=8$,故$|\boldsymbol{A}|=2$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=2(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=2\mathrm{diag}(1,1,1,8)^{-1}\\&=2\mathrm{diag}\left(1,1,1,\frac{1}{8}\right)=\mathrm{diag}\left(2,2,2,\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

据此,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}\left(1,1,1,-\frac{3}{4}\right)$是可逆矩阵,(因$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=-\frac{3}{4}\neq0$)

并且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\mathrm{diag}\left(1,1,1,-\frac{4}{3}\right).$$

将上述结果代入(*)式,得

$$B = 3\text{diag}\left(1,1,1,-\frac{4}{3}\right)\text{diag}\left(2,2,2,\frac{1}{4}\right) = \text{diag}(6,6,6,-1).$$

注 (1) 这里为大家提供了一条当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵时,由 $\boldsymbol{A}^*$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的常规途径;

(2) 本题中 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A}^*$)为可逆矩阵的条件是必需的.因为当 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵时,未必能由它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 来确定 $\boldsymbol{A}$.例如

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{的伴随矩阵均为} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

解 本题与教材例 15 相仿.因 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$,故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{11} &= \boldsymbol{P\Lambda}^{11}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2^{13} & 4+2^{13} \\ -1-2^{11} & -4-2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,731 & 2\,732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

22. 设 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$,

求 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^8(5\boldsymbol{E} - 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2)$.

解 因 $|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$,故 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵.于是,由 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$ 得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,并且记多项式 $\varphi(x) = x^8(5-6x+x^2)$,有

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是三阶对角阵,故

$$\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) = \text{diag}(\varphi(-1),\varphi(1),\varphi(5)) = \text{diag}(12,0,0),$$

于是

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\boldsymbol{P}^*\right)$$

$$= -2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

注　由于 $\varphi(\boldsymbol{A})$除(1,1)元外均是0,故在求 $\boldsymbol{P}^*$时,只需计算 $\boldsymbol{P}$ 的(1,1)元、(2,1)元、(3,1)元的代数余子式 A_{11},A_{21}和 A_{31}.

23. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明其伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆,且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

证　因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,由定理 2 的推论知 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},$$

另一方面,因 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$.

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘此式两边得

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},$$

比较上面两个式子,即知结论成立.

24. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为 $\boldsymbol{A}^*$,证明:

(1) 若$|\boldsymbol{A}|=0$,则$|\boldsymbol{A}^*|=0$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证　(1) 因

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}, \tag{2.5}$$

当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时,上式成为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

要证$|\boldsymbol{A}^*|=0$,用反证法:设$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$,由矩阵可逆的充要条件知,$\boldsymbol{A}^*$ 是可逆矩阵,用$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$左乘上式等号两边,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 于是推得 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式,亦即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素均为零. 这导致 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. 此与 $\boldsymbol{A}^*$ 为可逆矩阵矛盾. 这一矛盾说明,当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时,$|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 分两种情形:

情形 1:$|\boldsymbol{A}|=0$. 由(1),$|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,结论成立;

情形 2:$|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 在(2.5)式的两边取行列式,得

$$|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

于是
$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

注 本题(2)的结果值得记取.

25. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解 与教材例17相同,本题练习分块矩阵乘法.记

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}, B_{12}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}, B_{22}=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix},$$

则

$$原式=\begin{pmatrix}A_{11}&E_2\\O&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2&B_{12}\\O&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{11}B_{12}+B_{22}\\O&A_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

又
$$A_{11}B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7&-1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},$$
$$A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

故
$$原式=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$$

26. 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$,求 $|A^8|$ 及 A^4.

解 若记 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$,则 A 成为一个分块对角矩阵.于是

$$|A^8|=|A|^8=(|A_1||A_2|)^8=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16},$$
$$A^4=\begin{pmatrix}A_1^4&O\\O&A_2^4\end{pmatrix}.$$

因 $A_1^2=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=25E$,故 $A_1^4=5^4E$; $A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$,故 $A_2^4=2^4\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$(可参看

习题6).代入即得

$$A^4=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{pmatrix}.$$

27. 设 n 阶矩阵 A 与 s 阶矩阵 B 都可逆,求 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$.

解 因 A 和 B 均可逆,作分块阵 $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$,由分块矩阵乘法规则,

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&O\\O&E_s\end{pmatrix}=E_{n+s}.$$

于是 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 可逆,且 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

28. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{5}\\2&1&0\\4&3&0\end{pmatrix}$.

解 (1) 将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,其中 $A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$,$A_2=\begin{pmatrix}8&3\\5&2\end{pmatrix}$,因 $|A_1|=1$,$|A_2|=1$,故它们均可逆.于是由分块对角矩阵的性质,有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix};$$

(2) 将 A 分块为 $\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}$,其中 $A_1=\frac{1}{5}$,$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$,因 A_1,A_2 均可逆,由题27得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-2&1\\5&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&3&-1\\0&-4&2\\10&0&0\end{pmatrix}.$$

习题2(附答案和提示)

2.1 选择题:

(1) 设方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,则必有(　　);

(a) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　(b) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　　(c) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　(d) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称阵且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则下列矩阵中为对称阵的是(　　);

(a) $\boldsymbol{AB}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$　　(b) $\boldsymbol{AB}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$　　(c) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}$　　(d) $(\boldsymbol{AB})^2$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　);

(a) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(b) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(c) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(d) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(4) 矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{C}^*=$(　　).

(a) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

2.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,求 $\boldsymbol{B}^{2016}-2016\boldsymbol{A}^2$.

2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

2.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$,求 $|3\boldsymbol{A}^*-4\boldsymbol{A}^{-1}|$.

2.5 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{A}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2.6 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$.

2.7 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$,其中 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{7}\right)$,求 $\boldsymbol{B}$.

2.8 设矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix},$$

证明 $E+B$ 可逆,并求其逆.

2.9 设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$,证明:A 和 $A+4E$ 均可逆,并求其逆.

答案和提示

2.1 (1)(d); (2)(b); (3)(d),提示:$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$,$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$; (4)(d),提示:$CC^*=|C|E=|A||B|E$.

2.2 $\begin{pmatrix}2017&&\\&2017&\\&&-2015\end{pmatrix}$,$A^2=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$,$B^{2016}=P^{-1}A^{2016}P=E$.

2.3 由 $A^2=|A|E\Rightarrow A=|A|A^{-1}=A^*$.

2.4 $|A|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow|A^{-1}|=3$,$A^*=|A|A^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{-1}$,于是

$|3A^*-4A^{-1}|=|-3A^{-1}|=(-3)^4|A^{-1}|=3^5$.

2.5 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

提示:化简所给矩阵关系式得 $E=(E-C^{-1}B)^{\mathrm T}C^{\mathrm T}A=[C(E-C^{-1}B)]^{\mathrm T}A=(C-B)^{\mathrm T}A=(C^{\mathrm T}-B^{\mathrm T})A$,故 $A=(C^{\mathrm T}-B^{\mathrm T})^{-1}$,代入矩阵 B 和 C,并求逆即得.

2.6 $X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

2.7 $B=\mathrm{diag}(3,2,1)$.

2.8 $(B+E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

提示:$B=(E+A)^{-1}(E-A)\Rightarrow AB+A+B=E$,再凑成$(A+E)(B+E)=2E$(这一步是关键)$\Rightarrow B+E=2(A+E)^{-1}\Rightarrow(B+E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+E)$.

2.9 $A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A+2E)$.由$(A+4E)(A-2E)=-5E\Rightarrow A+4E$ 可逆且$(A+4E)^{-1}=-\dfrac{1}{5}(A-2E)$.参看例 2.1 及习题 13.

第 3 章

矩阵的初等变换与线性方程组

基 本 要 求

1. 熟练掌握用初等行变换把矩阵化成行阶梯形和行最简形，知道矩阵等价的概念.知道作初等变换相当于乘以可逆矩阵.掌握用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵的方法.

2. 理解矩阵的秩的概念，知道初等变换不改变矩阵的秩的原理，掌握用初等变换求矩阵的秩的方法.知道矩阵的标准形与秩的关系.知道矩阵秩的基本性质.

3. 理解线性方程组无解、有惟一解或有无限多解的充要条件(包括非齐次线性方程组有解的充要条件及齐次线性方程组有非零解的充要条件).

4. 熟练掌握用矩阵的初等行变换求解线性方程组的方法.

5. 知道矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件及必要条件.

内 容 提 要

1. 定义与记号

初等行变换($r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j$)，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$；

初等列变换($c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + kc_j$)，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$；

初等变换，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形、行最简形、标准形 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，这里 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

2. 初等变换的性质及应用

(1) 定理 1　$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

推论 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E}$.

(2) 若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{B},\boldsymbol{P})$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$;

若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}$;

若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

3. 矩阵的秩

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩定义为 $\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数,记作 $R(\boldsymbol{A})$.

(2) 定理 2 初等变换不改变矩阵的秩.

(3) 矩阵秩的性质

(i) $0 \leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$;

(ii) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$;

(iii) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,特别,若 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵有 t 个非零行,则 $R(\boldsymbol{A})=t$;

(iv) 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆,则 $R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$;

(v) $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\} \leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$,
特别地,当 $\boldsymbol{B}$ 为列向量 $\boldsymbol{b}$ 时,有

$$R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+1;$$

(vi) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$;

(vii) $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$ (定理 7);

(viii) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$,则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$(第 4 章例 13).

4. 线性方程组的解

(1) 基本定理(定理 3) n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

(i) 无解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$;

(ii) 有惟一解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$;

(iii) 有无限多解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

(2) 求解线性方程组的步骤(见教材).

5. 重要定理

为应用方便,常把 4 中的基本定理分成两个定理来叙述:

定理 4 n 元齐次线性方程 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$.

定理 5 线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

把定理 5 推广到矩阵方程,得

定理 6 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

定理 7 若 $\boldsymbol{AK}=\boldsymbol{B}$,则 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{B})$.

学习要点

本章先引入矩阵的初等变换(重点是初等行变换)、矩阵的等价以及矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形等概念,阐明了矩阵的初等变换与矩阵相乘的关系:对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行(列)变换,相当于用可逆矩阵左(右)乘 $\boldsymbol{A}$. 由此引出用初等变换求逆矩阵的方法.

矩阵的秩是矩阵的最重要的属性,由于它在初等变换下保持不变,因此有着十分广泛的应用. 对矩阵秩的性质也要有所了解,以增强应用矩阵的秩解决问题的能力.

根据初等变换不改变矩阵的秩的原理,在用初等行变换解线性方程组的过程中,建立起线性方程组的基本定理(即定理 3,或分开叙述成定理 4 和定理 5),并把它推广到矩阵方程. 线性方程组的理论与求解方法是线性代数课程中最基本、最重要的内容,贯串教材的始终,一定要切实掌握.

本章的重点是:掌握把矩阵化为行最简形的运算以及根据增广矩阵的行最简形熟练地写出线性方程组的通解,理解矩阵秩的概念及线性方程组的基本定理.

释疑解难

问 3.1 一个非零矩阵的行最简形与行阶梯形有什么区别和联系?

答 首先,行最简形和行阶梯形都是矩阵作初等行变换时的某种意义下的"标准形". 任何一个矩阵总可经有限次初等行变换化为行阶梯形和行最简形.

其次,行最简形是一个行阶梯形,但行阶梯形未必是行最简形. 其区别在于前者的非零行的首非零元必须为 1,且该元所在列中其他元均为零,因而该元所在列是一个单位坐标列向量;而后者则无上述要求.

问 3.2 在求解有关矩阵的问题时,什么时候只需化为行阶梯形,什么时候宜化为行最简形? 或者,它们在功能上有什么不同?

答 矩阵的初等行变换直接源于求解线性方程组的消元法,它是矩阵的最重要的运算之一,其原因就在于矩阵的行阶梯形和行最简形有强大的功能,是一个很理想的"操作平台",在此平台上,可以解决线性代数中许多问题,择其主要,如表 3-1 所示.

表 3-1 行阶梯形与行最简形归纳

行阶梯形	行最简形
1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$; 2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组(第四章).	1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$; 2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组(第 4 章); 3. 求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性关系(第 4 章); 4. 解线性方程组,求通解或基础解系(第 4 章); 5. 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,用 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 的行最简形求 $\boldsymbol{A}^{-1}$; 6. 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,用 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的行最简形求方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

问 3.3 (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,是否正确?

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,是否正确?

答 无论问题(1)或(2),必要性显然成立,只需讨论充分性.

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵时,充分性成立.这是因为此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的标准形;但是当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是同型矩阵时,充分性并不成立.例如设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,但显然任何初等变换都无法把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$.于是,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价.

(2) 即使 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,充分性也不成立.例如设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$,但 $\boldsymbol{A}$ 无法仅通过初等行变换成为 $\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是行等价的.

问 3.4 矩阵的初等变换与矩阵的乘法之间的联系有什么意义?

答 定理 1 确立了矩阵的初等变换与矩阵乘法之间的联系:

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换成为 $\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$;

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换成为 $\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

根据这一联系,我们既可以通过乘法的运算规律来研究初等变换的运算规律,又可通过初等变换来研究矩阵的乘法,从而开发出初等变换的一些应用.例如,若 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$,则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.为求出 $\boldsymbol{P}$,可用初等行变换,这时

$$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}\xLeftrightarrow{\text{因}\,\boldsymbol{PE}=\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{P})\Leftrightarrow(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}),$$

可见只要对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 作初等行变换,使之变为 $(\boldsymbol{B},*)$,则 $*$ 即是所求的可逆

矩阵 $\boldsymbol{P}$.

问 3.5 在求线性方程组的通解时,常与教材中给出的答案不一致,这是否可以?

答 以 n 元齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$为例,设 $R(\boldsymbol{A})=r$.只要能正确地找到 $n-r$个自由未知数,进而写出含有$n-r$个任意常数的通解,都是可以的.

但要强调指出的是:这种情况的发生往往是因为没有将增广矩阵(或系数矩阵)化为行最简形.根据行最简形直接写出方程组的通解而没有任何"回代"的动作,这种方法不妨称为解线性方程组的"标准程序".我们首先要理解这个标准程序的原理,并熟练掌握它(本章习题的答案均用此标准程序求得).在此基础上再考虑标准程序可变化之处,例如把$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$(或 $\boldsymbol{A}$)化成与行最简形有相同功能的矩阵,从而写出通解.下一章学了线性方程组通解的构造以后,求通解的方法就可更灵活了,详见第4章例12之析.

问 3.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充要条件有哪些?

答 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件,大致有以下几个:

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(定义)

$\Leftrightarrow$ $\det \boldsymbol{A}\neq \boldsymbol{0}$($\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵)

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形有 n 个非零行

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行最简形是 $\boldsymbol{E}$($\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的标准形是 $\boldsymbol{E}$($\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}$)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$($\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵)

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关($\Leftrightarrow$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=n$)(第4章)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关($\Leftrightarrow$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=n$)(第4章)

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值均非零(第5章).

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4=2,\\ x_1+x_2-2x_3+x_4=4,\\ 4x_1-6x_2+2x_3-2x_4=4,\\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9.\end{cases}$$

析 这是一个重要的例题，教材用较大篇幅讲解以表明它多方面而又基本的涵义，需细心体会.

(1) 求解线性方程组可分为消元与回代两过程.消元过程的实质，就是通过一系列方程组的同解变换找到一个形式上较简单的方程组，然后进行回代.这里方程组的同解变换是指下列三种变换：

(i) 对换两个方程；

(ii) 以不为零的数乘某一方程；

(iii) 把一个方程的若干倍加到另一个方程上.

(2) 方程组的三种同解变换自然引导出矩阵的三种初等行变换.因此若矩阵 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$，从解齐次方程角度看，等价于把方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解变换为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，即可认为是同一事件的两种语言描述，它们能够“互译”.当然 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 所包含的意义远比解方程丰富，这是因为矩阵是从许多问题中抽象出来的概念.

(3) 原方程组能同解变换成什么样的最简单方程组就相当于增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 在初等行变换下能变换成什么样的最简单矩阵，答案就是教材中矩阵 $\boldsymbol{B}_5$，它是 $\boldsymbol{B}$ 的行最简形，把它“翻译”成方程组后，无需回代过程即可直接写出通解.因此有理由把增广矩阵(或系数矩阵)化为行最简形，进而写出通解，称为解线性方程组的“标准程序”.

(4) 从本例的结果看，有两点值得注意：

(i) 四个未知数划分为自由未知数 x_3 与非自由未知数 x_1,x_2,x_4；

(ii) 从本例开始，我们将处理方程组无解或有无限多解的问题，在后一情形中，其通解是含有任意常数并能表示任何一个解的解.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵为 $\boldsymbol{F}$，求 $\boldsymbol{F}$，并求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{F}$.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{pmatrix}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 3 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-2&5\end{pmatrix}.$$

析 这三例都是矩阵初等行变换的应用,它们的原理是相同的:即在 $\boldsymbol{A}$ 的右边放置一个与 $\boldsymbol{A}$ 行数相同的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 而成为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作若干次初等行变换,由定理 1,相当于用可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘它. 设

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PB}),$$

若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 从而 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,它可用来求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,如例 3). 特别地,取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则上式成为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{P}), \tag{3.1}$$

这说明若 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行变换成为 $\boldsymbol{PA}$,那么所用的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是(3.1)式右端逗号右边的那个矩阵,如例 1;若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,并且 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}$,它可用来求逆矩阵,如例 2.

例 5 求矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 和 $\boldsymbol{B}_{4\times5}$ 的秩 .

析 求矩阵的秩就是计算它的最高阶非零子式的阶数. 若用定义,则往往要计算许多行列式,使计算量很大. 如对于 $\boldsymbol{B}$ 至少要计算 5 个四阶行列式和 1 个三阶行列式才能求得 $R(\boldsymbol{B})=3$. 因此除了阶数较低(如 $\boldsymbol{A}$)和个别特性较显著的矩阵(如习题 20),一般都用定理 2 来求秩. 定理 2 的作用是把矩阵秩的计算归结为它的行阶梯形中非零行数的计数,这当然比用定义计算方便许多.

例 13 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda,\end{cases}$$

问 λ 取何值时,此方程组(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

析 求解带参数的方程组,包括何时无解、有惟一解、有无限多解,是定理 3 的综合应用,要理解其解法的理论依据,并掌握它的解法. 带参数 λ 的非齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,一般有如本例所给出的两种求解方法,其一是当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时,根据其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,求得使方程有惟一解的 λ 值,然后将其他的 λ 值代入方程,进行讨论、求解. 这种方法的优点是避免了对带参数的矩阵作初等行变换,缺点是仅适用于 $\boldsymbol{A}$ 为方阵的情形;方法之二是对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等行变换,此方法虽更具一般性,但由于涉及含 λ 的多项式的运算,计算中容易出错.

二、例题增补

例 3.1 下列四个 3×4 矩阵中,哪些是行最简形?

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

解 由行最简形的定义知,$\boldsymbol{A}_4$ 是行最简形;$\boldsymbol{A}_2$ 不是行最简形,因为它的第 2 行的首非零元所在列不是单位坐标向量列,即该列有其他非零元;$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 不是行最简形,因为它们首先不是行阶梯形.

例 3.2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix},$$

试求:(1) $\boldsymbol{A}$ 的行最简形;(2) $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

解 (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\overset{r_2-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\1&-2&-1&-1\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\2&-4&5&3\\4&-8&17&11\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-4r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\0&0&7&5\\0&0&21&15\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-21r_2\\r_1+r_2}}{\overset{r_2\times\frac{1}{7}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此即为 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形.

(2) 进一步对 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形作初等列变换:

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{2}{7}\\0&1&0&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+\frac{2}{7}c_1-\frac{5}{7}c_2]{c_3+2c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

此即为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

例 3.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $m<n$, 其秩 $R(\boldsymbol{A})=m$, 则(　　).

(a) 存在 m 阶不可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{QA}=(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$

(b) 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PA}=(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$

(c) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(d) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无限多解

解 选(d). 说明如下:

(a) 不正确. 因由矩阵秩的性质 7,

$$R(\boldsymbol{Q})\geqslant R(\boldsymbol{QA})=R(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})=m,$$

与 Q 为 m 阶不可逆矩阵矛盾.

(b) 不正确. 若选项(b)成立, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})=(\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{O}),$$

其中 $\boldsymbol{O}$ 是 $m\times(n-m)$ 零矩阵. 这表明 $\boldsymbol{A}$ 的后 $n-m$ 列均为零列向量. 但对于秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说, 一般是不满足这一点的, 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(c) 不正确. 反例: 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则显然 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是它的非零解.

(d) 正确. 证明如下: 此时, 非齐次方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

的系数矩阵和增广矩阵的秩满足

$$m=R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant m,$$

于是, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=m<n=$ 未知数个数, 从而这方程必有无限多解.

例 3.4 设 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与 $n+1$ 阶矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \end{pmatrix}$$

的秩相等,证明此线性方程组必有解.

证 注意到系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,其增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times(n+1)$矩阵,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是$(n+1)\times(n+1)$矩阵,由矩阵的秩的定义,有

$$\boldsymbol{A}\text{ 比 }\boldsymbol{B}\text{ 少一列}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B}),$$

$$\boldsymbol{B}\text{ 比 }\boldsymbol{C}\text{ 少一行}\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{C}),$$

于是

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{C}).$$

由题设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{C})$,所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,由定理 5 原方程组有解.

例 3.5 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中 $a\neq 0, b\neq 0, n\geqslant 2$. 试讨论 a,b 为何值时,方程组仅有零解,有无限多解?在有无限多解时,求通解.

解 方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式(见习题一题 8(2))

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

情形 1:$a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$,方程组仅有零解.

情形 2:$a=b$,对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换,并注意到 $a\neq 0$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

即得原方程组的同解方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

取 $x_2,\cdots,x_n$ 为自由未知数,即得通解

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1},\quad k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in\mathbb{R},$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

情形3：$a=(1-n)b$，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换并注意到 $b\neq0$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1-n)b & b & \cdots & b\\ b & (1-n)b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & (1-n)b\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{除以 }b]{\text{各行}}\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-r_n\\ \cdots\\ r_{n-1}-r_n}]{r_1-r_n}\begin{pmatrix}-n & 0 & \cdots & n\\ 0 & -n & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{除以 }n\text{，并加到第 }n\text{ 行}]{\text{前 }n-1\text{ 行均}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & -1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

于是，得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1=x_n,\\ x_2=x_n,\\ \vdots\\ x_{n-1}=x_n,\end{cases}$$

即得通解　$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi},k\in\mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

习 题 解 答

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 4 & -7 & -1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&3\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&-1&3\\0&0&-2&6\end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_1-2r_2\\r_3+2r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&2&-3&1\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}$

$\overset{r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1+r_2\\r_3+r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{r_2-r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&-3&6&-6\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3+3r_2\\r_4+5r_2}}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-2r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_1-2r_2\\r_3+8r_2\\r_4+7r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\underset{r_4-r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$,求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形.

解　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\2&3&4&5&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&1\end{pmatrix}\underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&-6&-12&-18&-5&0&1\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{r_1-2r_2\\r_3+6r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3&2&0\\0&1&2&3&2&-1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix},$$

故 $P=\begin{pmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}$,并且 A 的行最简形为 $PA=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$,(1) 求一个可逆矩阵 P,使 PA 为行最简形;(2) 求一个可逆矩阵 Q,使 QA^{T} 为行最简形.

解 (1) $(A,E)=\begin{pmatrix}-5&3&1&1&0\\2&-1&1&0&1\end{pmatrix}\overset{r_1+3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&1&3\\2&-1&1&0&1\end{pmatrix}$

$$\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&4&1&3\\0&1&7&2&5\end{pmatrix},$$

于是 $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$,且 $PA=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\end{pmatrix}$为 A 的行最简形;

(2) $(A^{\mathrm{T}},E)=\begin{pmatrix}-5&2&1&0&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-3&-5&0\\0&1&-1&-2&1\end{pmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&3&5&0\\0&0&-4&-7&1\end{pmatrix},$$

于是 $Q=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\-4&-7&1\end{pmatrix}$,并且 $QA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$为 A^{T} 的行最简形.

4. 试利用矩阵的初等变换,求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解 记所给的矩阵为 A.

(1) $(A,E)=\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$

$$\underset{r_1-2r_2}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}3&0&9&-1&2&0\\0&1&-4&1&-1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1-9r_3\\r_2+4r_3}}{\overset{r_3\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}3&0&0&\frac{7}{2}&2&-\frac{9}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\div 3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$,由定理 1 的推论,知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

$$(2)\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\leftrightarrow r_4}{\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-2r_2}{\overset{r_3-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-4r_2}{\overset{r_1+2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&1&2\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2-2r_3\\r_4+2r_3}}{\overset{r_1-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&0&4&6\\0&1&0&-1&-2&0&6&9\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1+r_4\\ r_2+r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix},$$

因 $A\overset{r}{\sim}E$,由定理 1 之推论,知 A 可逆,并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}.$$

5. 试利用矩阵的初等行变换,求解习题二题 15 之(2).

解 对此方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&2&4&3\\1&3&9&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&1\\0&1&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1-r_2\\ r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&3&1\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

由此得到解为 $x_1=2,x_2=-\frac{1}{2},x_3=\frac{1}{2}$.

6. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$,求 X 使 $AX=B$;

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$,求 X 使 $XA=B$;

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $AX=2X+A$,求 X.

解 (1) 与教材例 3 相仿,若 A 是可逆矩阵,则可求得矩阵方程的解为 $X=A^{-1}B$,而判断 A 是否可逆进而求解这两件事可通过(A,B)的行最简形一起解决:即若 $A\overset{r}{\sim}E$,则 A 可逆,并且初等行变换把 A 变为 E 的同时,把 B 变为 $A^{-1}B$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\overset{r_1-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&1&2&9&5\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&0&-1&-12&-4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+r_3\\r_2-2r_3}}{\overset{r_3\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$.

(2) 因 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,对照(1),可用初等行变换先求得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,再转置求得 $\boldsymbol{X}$.计算如下:

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}0&2&-3&1&2\\2&-1&3&2&-3\\1&3&-4&3&1\end{pmatrix}\underset{r_2-2r_1}{\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-4&3&1\\0&-7&11&-4&-5\\0&2&-3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+4r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-4&3&1\\0&1&-1&0&3\\0&2&-3&1&2\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&3&-8\\0&1&-1&0&3\\0&0&-1&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2-r_3\\r_3\times(-1)}}{\overset{r_1-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-4\\0&1&0&-1&7\\0&0&1&-1&4\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&7\\-1&4\end{pmatrix}$,从而 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$.欲解此方程,需要(i)判断 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵;(ii)进一步求 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.这两件事可由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 的行最简形一揽子解决.

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+r_1\\r_2\times(-1)}}{\overset{r_1\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&1&-1&-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&2&-1\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1+r_3\\r_2-r_3}}{\overset{r_3\div(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix},$$

上述结果表明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

7. 在秩是 r 的矩阵中，有没有等于0的 $r-1$ 阶子式？有没有等于0的 r 阶子式？

解　在秩是 r 的矩阵中等于0的 $r-1$ 阶子式可能有，也可能没有；等于0的 r 阶子式可能有，也可能没有. 例如：

(i) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 的秩为2，有等于0的1阶子式（简称1阶零子式，下同），但没有2阶零子式；

(ii) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的秩为2，没有1阶零子式，也没有2阶零子式；

(iii) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 的秩为2，有1阶零子式，也有2阶零子式；

(iv) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的秩为2，没有1阶零子式，但有2阶零子式.

8. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样？

解　由矩阵秩的性质⑤，有

$$R(\boldsymbol{A})-1\leqslant R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A}).$$

9. 求作一个秩是4的方阵，它的两个行向量是

$$(1,0,1,0,0),(1,-1,0,0,0).$$

解　因 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩为2，故满足要求的方阵可以取为

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

注　(1) 显然所求矩阵应是5阶方阵；

(2) 有无限多个5阶方阵满足要求，我们给出的是最简单、最朴素的方法：

在秩为 2 的行向量组下面,再适当地铺上两个台阶,以构成含四个有效台阶的行向量组.

10. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故它的秩为 2;

(2) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 7r_1}}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3 - 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3;

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1}}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 3r_2}}{\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-16r_3}{\overset{r_3\div 14}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是它的秩为3.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,证明 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证 必要性即定理2,故只需证明充分性.设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$,那么矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的标准形

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

于是 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{F},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{F}$,从而由等价关系的对称性和传递性,知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$,问 k 为何值,可使

(1) $R(\boldsymbol{A})=1$; (2) $R(\boldsymbol{A})=2$; (3) $R(\boldsymbol{A})=3$.

解一 因 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵,故 $R(\boldsymbol{A})=3\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0$.因

$$|\boldsymbol{A}|=-6(k-1)^2(k+2),$$

所以当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=3$.

当 $k=-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})\leqslant2$,又 $\boldsymbol{A}$ 的左上角二阶子式不为零,故 $R(\boldsymbol{A})\geqslant2$,于是 $R(\boldsymbol{A})=2$;

当 $k=1$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

知 $R(\boldsymbol{A})=1$.

解二 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\underset{r_3-kr_1}{\overset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&-3(k^2-1)\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k-1)(k+2)\end{pmatrix},$$

于是,(1) 当 $k=1$ 时,$R(\boldsymbol{A})=1$;(2) 当 $k=-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=2$;(3) 当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$时,$R(\boldsymbol{A})=3$.

13. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0;\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-7x_4=0,\\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0,\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0,\\ x_1-2x_2+5x_3-5x_4=0;\end{cases}\qquad (4)\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

解 对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换,化为行最简形.

(1) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}\overset{r_2\times(-1)}{\underset{r_3\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&1&3&-1\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\overset{r_1+r_3}{\underset{r_2-3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix},$$

于是 $R(\mathbf{A})=3$,故方程组有 $4-R(\mathbf{A})=1$ 个自由未知数;并且同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-\frac{4}{3}x_4=0,\\ x_2+3x_4=0,\\ x_3-\frac{4}{3}x_4=0,\end{cases}$$

取 x_4 为自由未知数,得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}\quad (c\in\mathbb{R}).$$

(2) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\overset{r_2-3r_1}{\underset{r_3-5r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\overset{r_2\div(-4)}{\underset{\substack{r_1-r_2\\r_3+4r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

取 x_2 和 x_4 为自由未知数,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4,\\ x_3=0,\end{cases}$$

得
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

(3) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&-7\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&5&-5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-3r_1\\r_3-4r_1\\r_4-2r_1}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&5&-5\\0&7&-13&8\\0&9&-23&26\\0&7&-11&3\end{pmatrix}$$
$$\underset{r_4-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&5&-5\\0&7&-13&8\\0&2&-10&18\\0&0&2&-5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2\div 2\\r_1+2r_2\\r_3-7r_2}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-5&13\\0&1&-5&9\\0&0&22&-55\\0&0&2&-5\end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{r_1+5r_3\\r_2+5r_3\\r_4-2r_3}}{\overset{r_3\div 22}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{7}{2}\\0&0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

取 x_4 为自由未知数,得
$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_4,\\x_2=\dfrac{7}{2}x_4,\\x_3=\dfrac{5}{2}x_4,\end{cases}\qquad \text{即有通解}\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R}).$$

(4) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{r_3-4r_1\\r_4-7r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&-17&19&-20\\0&-17&19&-20\\0&-51&57&-60\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4-3r_2\\r_2\div(-17)}}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-7r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17}\\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

取 x_3 和 x_4 为自由未知数,得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4,\\ x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4,\end{cases}$$

即得通解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\ \frac{19}{17}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\ -\frac{20}{17}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

14. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\ 3x_1-x_2+2x_3=10,\\ 11x_1+3x_2=8;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x+3y+z=4,\\ x-2y+4z=-5,\\ 3x+8y-2z=13,\\ 4x-y+9z=-6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\ 4x+2y-2z+w=2,\\ 2x+y-z-w=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\ 3x-2y+z-3w=4,\\ x+4y-3z+5w=-2.\end{cases}$

解 本题中分别以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 10\\ 11 & 3 & 0 & 8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & -8\\ 3 & -1 & 2 & 10\\ 11 & 3 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & -8\\ 0 & -10 & 11 & 34\\ 0 & -30 & 33 & 96\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & -8\\ 0 & -10 & 11 & 34\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$,知方程组无解;

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\2&3&1&4\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-4r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&7&-7&14\\0&14&-14&28\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-14r_2\\r_4-7r_2}}{\overset{r_2\div 7}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$,故方程组有无限多解,并且有 $3-R(\boldsymbol{A})=1$ 个自由未知数.选 z 为自由未知数,得到同解方程组:

$$\begin{cases}x+2z=-1,\\y-z=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z-1,\\y=z+2,\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R});$$

(3) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$

$$\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_1\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

选 y,z 为自由未知数,得到同解方程组

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2},\\w=0,\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R});$$

(4) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\3&-2&1&-3&4\\2&1&-1&1&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-14&10&-18&10\\0&-7&5&-9&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div(-14)]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

选 z,w 为自由未知数,得同解方程组

$$\begin{cases}x=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w+\frac{6}{7},\\y=\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w-\frac{5}{7},\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{9}{7}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

15. 写出一个以

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}\tag{3.2}$$

为通解的齐次线性方程组.

解 把(3.2)式改写为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1-2c_2\\-3c_1+4c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}\xlongequal[c_2=x_4\text{代入}]{\text{以 }c_1=x_3\text{、}}\begin{pmatrix}2x_3-2x_4\\-3x_3+4x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

由此知所求方程组有 2 个自由未知数 x_3,x_4,且对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \end{cases}$$

它以(3.2)式为通解.

注 (1) 有无限多个齐次方程组以(3.2)式为通解表示式,这里给出比较简单的一个,即系数矩阵为行最简形.

(2) 本题与习题四题23相仿,是同一问题的两种提法.

16. 设有线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解 记此方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,那么当 $\lambda \neq 2$,且 $\lambda \neq -\dfrac{1}{2}$ 时 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$,有惟一解;当 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ 时,$R(\boldsymbol{A}) = 2$,而 $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$,故方程组无解;当 $\lambda = 2$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2 < 3$,故方程组有无限多解,且同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 3, \\ x_3 = 1, \end{cases} \quad 得通解 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

17. λ 取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解 仿照教材例13,本题也有两种解法,且以行列式解法较为简单,故这里只用此法解之.

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为(可参看习题一题8(2))

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时,即当$\lambda\neq 1,\lambda\neq -2$时,$R(\boldsymbol{A})=3$,方程组有惟一解;

当$\lambda=1$时,增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可见,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$,于是方程组有无限多解．因同解方程为$x_1=-x_2-x_3+1$,

故通解为 $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

当$\lambda=-2$时,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-r_1\\ r_3+2r_1}}{\overset{r_3\leftrightarrow r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -3 & 9\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$,于是方程组无解.

18．非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当λ取何值时有解?并求出它的通解.

解 这里系数矩阵$\boldsymbol{A}$是方阵,但$\boldsymbol{A}$中不含参数,故以对增广矩阵作初等行变换为宜,求解如下:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda\\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_2}{\overset{r_2\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2$,故当 $R(\boldsymbol{B})=2$,即当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时,方程组有解.

当 $\lambda=1$ 时,

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

选 x_3 为自由未知数,得同解方程组$\begin{cases}x_1=x_3+1,\\x_2=x_3,\end{cases}$

即 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R});$$

当 $\lambda=-2$ 时,

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

选 x_3 为自由未知数,得 $\begin{cases}x_1=x_3+2,\\x_2=x_3+2,\end{cases}$

即 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R}).$$

19. 设

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-(\lambda+1),\end{cases}$$

问 λ 为何值时,此方程组有惟一解、无解或有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解 由于系数矩阵是方阵,其行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{\underset{c_3+c_2}{=\!=}}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&1-\lambda\\0&1-\lambda&2(1-\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&1-\lambda\\0&1&2\end{vmatrix}\overset{c_3-2c_2}{=\!=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-4\\2&5-\lambda&\lambda-9\\0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&-4\\2&\lambda-9\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时,方程组有惟一解;

当$\lambda=10$时,增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\underset{r_2+4r_1}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_3+r_1}{\sim}}}\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&-18&-18&9\\0&-9&-9&-9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$,方程组无解;

当$\lambda=1$时,增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$,方程组有无限多解,且其通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

20. 证明$R(\boldsymbol{A})=1$的充分必要条件是存在非零列向量$\boldsymbol{a}$和非零行向量$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

证 先证充分性.设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,并不妨设$a_1b_1\neq 0$.

按矩阵秩的性质⑦,由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$有$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{a})=1$;另一方面,$\boldsymbol{A}$的$(1,1)$元$a_1b_1\neq 0$,知$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.于是$R(\boldsymbol{A})=1$.

再证必要性.设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},R(\boldsymbol{A})=1$,并不妨设$a_{kl}\neq 0$.

因$R(\boldsymbol{A})=1$,知$\boldsymbol{A}$的所有二阶子式均为零,故对$\boldsymbol{A}$的任一元a_{ij} $(i\neq k,j\neq l)$有

$$\begin{vmatrix}a_{ij}&a_{il}\\a_{kj}&a_{kl}\end{vmatrix}=0,\text{即 } a_{kl}a_{ij}=a_{il}a_{kj}.$$

上式当$i=k$或$j=l$时也显然成立.于是

$$\begin{pmatrix}a_{1l}\\a_{2l}\\\vdots\\a_{ml}\end{pmatrix}(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})=(a_{il}a_{kj})_{m\times n}=(a_{kl}a_{ij})_{m\times n}=a_{kl}\boldsymbol{A}.$$

令 $a=\frac{1}{a_{kl}}\begin{pmatrix}a_{1l}\\a_{2l}\\\vdots\\a_{ml}\end{pmatrix}$，$b^{\mathrm{T}}=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})$，则因 $a_{kl}\neq0$，故 a,b^{T} 分别是非零列向量和非零行向量，且有 $A=ab^{\mathrm{T}}$.

21. 设 A 为列满秩矩阵，$AB=C$，证明方程 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解.

证 若 x 满足 $Bx=0$，则 $ABx=0$，即 $Cx=0$；

若 x 满足 $Cx=0$，即 $ABx=0$，因 A 为列满秩矩阵，由定理 4 知方程 $Ay=0$ 只有零解，故 $Bx=0$.

综上即知方程 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解.

22. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

证 按定理 6 知，方程 $AX=E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,E_m)$，而 (A,E_m) 含 m 行，有 $R(A,E_m)\leqslant m$；又 $R(A,E_m)\geqslant R(E_m)=m$，因此 $R(A,E_m)=m$. 所以方程 $AX=E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=m$.

习题 3(附答案和提示)

3.1 选择题

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则(　　)；

(a) a,b,c 都不等于 1　　(b) a,b,c 都不等于 0

(c) a,b,c 互不相等　　(d) $a=b=c$

(2) 设 A 为 3 阶方阵，$R(A)=1$，则(　　)；

(a) $R(A^*)=3$　　(b) $R(A^*)=2$

(c) $R(A^*)=1$　　(d) $R(A^*)=0$

(3) 设 A,B 分别为 $m\times n$、$n\times m$ 矩阵，则齐次方程 $ABx=0$(　　)；

(a) 当 $n>m$ 时仅有零解　　(b) 当 $m>n$ 时必有非零解

(c) 当 $m>n$ 时仅有零解　　(d) 当 $n>m$ 时必有非零解

(4) 设齐次方程 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

则系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为(   );

(a) $(-2,1,1)$　　(b) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$

(5) 设 2×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$,则下列命题中错误的为(   ).

(a) 齐次方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解

(b) 齐次方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$必有非零解

(c) 对任意的 2 维向量 $\boldsymbol{b}$,方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有无限多解

(d) 对任意的 3 维向量 $\boldsymbol{b}$,方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有惟一解

3.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&8&-4&12\\3&6&-3&k\end{pmatrix}$,问 k 取何值时,(1) $R(\boldsymbol{A})=1$;(2) $R(\boldsymbol{A})=2$;(3) $R(\boldsymbol{A})=3$?

3.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&2&-1\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$,使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

3.4 证明线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=b_1,\\x_2-x_3=b_2,\\x_3-x_4=b_3,\\x_4-x_1=b_4\end{cases}$$

有解的充要条件是 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$.

3.5 线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1,\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1,\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda,\end{cases}$$

问 λ 取何值时,(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解?并在有无限多解时求出通解.

3.6 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n$.

答案和提示

3.1 (1) (c),提示:所给矩阵的行列式为范德蒙德行列式;

(2) (d),提示:$R(\boldsymbol{A})=1\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 中无 2 阶非零子式$\Rightarrow\boldsymbol{A}^*$ 为零矩阵;

(3) (b),提示:$R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant n<m=\boldsymbol{AB}$ 的列数;

(4) (a),提示:方程有两个自由未知数,故 $R(\boldsymbol{A})=1$;

(5) 选(d).(a) 正确:$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列数;(b) 正确:$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})_{3\times 3}\leqslant R(\boldsymbol{A})=2$;(c) 正确:$2=R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})_{2\times 4}\leqslant 2\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$;(d) 错误:取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解 .

3.2 (1) $k=9$;(2) $k\neq 9$;(3) 不可能.

3.3 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}5&15&-12\\-23&43&-12\end{pmatrix}$.

3.4 提示:增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 经初等行变换为 $\begin{pmatrix}1&-1&0&0&b_1\\0&1&-1&0&b_2\\0&0&1&-1&b_3\\0&0&0&0&b_1+b_2+b_3+b_4\end{pmatrix}$,故方程组有解$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B})=3\Leftrightarrow b_1+b_2+b_3+b_4=0$.

3.5 (1) 当 $\lambda\neq 1,\lambda\neq 3$ 时,有惟一解;

(2) 当 $\lambda=3$ 时,无解;

(3) 当 $\lambda=1$ 时,有无限多解,其通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

3.6 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\Rightarrow R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\leqslant n$;又,$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant R(4\boldsymbol{E})=n$.

第 4 章

向量组的线性相关性

基 本 要 求

1. 理解 n 维向量的概念,理解向量组的概念及向量组与矩阵的对应.

2. 理解向量组的线性组合的概念,理解一个向量能由一个向量组线性表示的概念并熟悉这一概念与线性方程组的联系.

3. 理解向量组 B 能由向量组 A 线性表示的概念及其矩阵表示式,知道这一概念与矩阵方程的联系.知道两向量组等价的概念.

4. 理解向量组线性相关、线性无关的概念,并熟悉这一概念与齐次线性方程组的联系.

5. 理解向量组的最大无关组和向量组的秩的概念,知道向量组的秩与矩阵的秩的关系.会用矩阵的初等变换求向量组的秩和最大无关组.

6. 了解向量组线性相关性理论的主要结论,即教材中定理 1 - 定理 5.

7. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念及系数矩阵的秩与全体解向量的秩之间的关系,熟悉基础解系的求法.理解非齐次线性方程组通解的构造.

8. 知道向量空间、向量空间的基和维、向量组生成的空间、齐次线性方程组的解空间等概念.会求向量在一个基中的坐标.

内 容 提 要

1. 线性组合与线性表示

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$(或记作 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$)有解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=R(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ (定理 1,上章定理 5).

(2) 向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$矩阵方程$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$ (或记作 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$)有解

$\Leftrightarrow$存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times l}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ (定理 2,上章定理 6)

$\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$ (定理 3,上章定理 7).

(3) 向量组 A 与向量组 B 等价(能相互线性表示)

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

2. 线性相关与线性无关

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$(或记作 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$)有非零解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)<m$ (定理 4,上章定理 4).

3. 线性相关与线性表示的关系

(i) 向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ $(m\geqslant 2)$线性相关的充要条件是存在某个向量 $\boldsymbol{a}_j$ 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

(ii) 设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 A 线性表示,且表示式是惟一的.

4. 向量组线性相关性的其他结论

(i) 线性无关向量组的任一部分组也线性无关(整体无关则部分无关);有部分组线性相关的向量组其本身也线性相关(部分相关则整体相关).

(ii) 向量个数比向量维数大的向量组线性相关.

5. 向量组的最大无关组与向量组的秩

(1) 定义与等价定义

如果在向量组 A 中能选出 r 个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$,满足

(i) 向量组 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关;

(ii) A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,

那么称 A_0 是 A 的一个最大无关组;最大无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩,记作 R_A.只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为 0.

等价定义:上述定义中的条件(ii)可改为

(iii) A 中任一向量都能由 A_0 线性表示.

(2) 只含有限个向量的向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于向量组 A 的秩,即

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=R_A.$$

(3) 利用最大无关组和向量组的秩,可以把定理 1、2、3 推广到含无限个向量的向量组.

6. 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解集 S 的最大无关组称为此方程组的基础解系.设 $R(\boldsymbol{A})=r$,则解集的秩 $R_S=n-r$,即基础解系含 $n-r$ 个解

向量.设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为它的一个基础解系,则其通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

齐次线性方程组的解集 S 是非空集合,并且对向量的线性运算封闭(即若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in S$,则 $\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\in S$,其中 λ_1,λ_2 为数),故 S 是一个向量空间,称为齐次线性方程组的解空间.

7. 设非齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*$,对应的齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,则它的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

8. 向量空间

(1) 设 V 为 n 维向量的集合,如果 V 非空,且 V 对于向量的线性运算封闭,那么 V 就称为向量空间.

向量空间 V 的最大无关组称为 V 的基,向量空间 V 的秩 R_V 称为 V 的维数.若 $R_V=r$,则称 V 为 r 维向量空间.

设 r 维向量空间 V 的一个基为 $\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2,\cdots,\boldsymbol{j}_r$,则任一向量 $\boldsymbol{v}\in V$,总有惟一的一组有序数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{j}_1+\lambda_2\boldsymbol{j}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{j}_r,$$

数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 $\boldsymbol{v}$ 在基 $\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2,\cdots,\boldsymbol{j}_r$ 中的坐标.

(2) 给定 n 维向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,集合

$$L(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m\mid k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{R}\}$$

是一个向量空间,称为由向量组 A 所生成的向量空间.

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 组与 B 组所生成的向量空间相等.

学习要点

本章介绍线性代数的几何理论.把线性方程组的结论"翻译"成几何语言(或称向量语言)即可得本章的结论.因此掌握几何语言,即掌握本章中的概念(定义)是学好本章的关键.方程组理论是在矩阵运算和矩阵的秩的基础上建立起来的,几何的基本元素是向量,而向量组可等同于矩阵,因此,矩阵是连接方程组理论与几何理论的纽带,又是解决问题时最常用的方法.学习本章要特别注意方程语言、矩阵语言、几何语言三者之间的转换.突出的典型问题是对关系式

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{K}_{m\times l}\quad(\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK})$$

所作的解释:

矩阵语言：$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的乘积矩阵；

方程语言：矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{K}$；

几何语言：向量组 B 能由向量组 A 线性表示，$\boldsymbol{K}$ 是这一表示的系数矩阵.

总之，注重掌握概念（定义），强调矩阵的表示形式，熟悉三种语言的转换，便可直接得出本章定理1～4，而定理5的证明可看做是用矩阵方法解题的范例.

把矩阵的秩引申到向量组的秩，给秩的概念赋予几何解释.并且由于向量组可以含无限多个向量，从而使秩的概念深入到更广阔的领域.

本章第二部分内容是用几何语言来讨论线性方程组的解，建立起线性方程组理论中另一个重要定理：n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-R(\boldsymbol{A})$.并由此提出齐次线性方程组的基础解系的概念，阐明了齐次和非齐次线性方程组通解的结构.这是本章又一重点，学习时要与上章求解线性方程组的方法相结合.对于用矩阵初等行变换求解线性方程组的方法，不仅要熟练掌握，而且要理解其原理，从而能灵活运用.

本章最后一部分是向量空间有关知识的介绍.按照“工科类高等数学课程教学基本要求”，学习时只需了解下列概念：向量空间、齐次线性方程组的解空间、向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间 $L(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$、向量空间的基和维数.对于教学要求较高的读者，可阅读教材第6章§1和§2.

释疑解难

问4.1　线性相关与线性表示这两个概念有什么区别和联系？

答　向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的方程语言是齐次线性方程 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 A 线性表示的方程语言是非齐次线性方程 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解.齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解与非齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解，显然是两个不同的问题，由此可知线性相关与线性表示这两个概念的区别.

另一方面，教材指出：向量组 A 线性相关的充要条件是 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示.这个充要条件就把线性相关与线性表示这两个概念联系了起来，我们常把这个充要条件作为向量组线性相关性的等价定义.向量组 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示，也就是 A 的向量之间至少有一个线性关系式，这就是向量组 A 线性相关的涵义.

按此等价定义，向量组 A 线性无关的充要条件是 A 中任意一个向量均不能由其余向量线性表示.形象地说，即“谁也表示不了谁”，这种“独立”性正是向量

组 A 线性无关(linearly independent,也有人称之为线性独立)所包含的意义.

问 4.2 两个矩阵的等价与两个向量组的等价有什么区别和联系?

答 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价指的是 $\boldsymbol{A}$ 可以通过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$,因此,两个不同型的矩阵是不可能等价的;两向量组的等价指的是它们能够相互线性表示,于是,它们各自所含向量的个数可能是不一样的.例如二维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$与二维向量组 $B:\left\{\boldsymbol{\beta}=k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\middle| k\in\mathbb{R}\right\}$是等价的.但前者只含一个向量;而后者含有无限多个向量.

两矩阵的等价与两向量组的等价两者的联系在于:

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价;若 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换变成 $\boldsymbol{C}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 列等价,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组等价;若 $\boldsymbol{A}$ 既经初等行变换又经初等列变换变成 $\boldsymbol{D}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 等价,但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 的行向量组与列向量组未必等价.

(2) 反过来,设两列向量组等价.若它们所含向量个数不相同,则它们对应的两个矩阵是不同型的,因而不等价;若它们所含向量个数相同(例如都含有 m 个),那么它们对应的两个 $n\times m$ 矩阵(这里 n 为向量的维数)列等价,从而一定等价,但不一定行等价.例如

向量组 $A:\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$与向量组 $B:\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$等价,它们对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$列等价,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,但非行等价.

类似地,若两个含向量个数相同的行向量组等价,则它们对应的两矩阵行等价,从而一定等价,但不一定列等价.

问 4.3 何谓两个向量组各个向量之间有相同的线性关系?

答 称 n 维向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与 l 维向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$(这里 n 与 l 可以相等,也可以不相等)各向量之间有相同的线性关系是指:(i) $\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{b}_i$ 一一对应;(ii) A 的任一部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_s}$ 具有某种线性关系的充要条件是 B 的对应的部分组 $\boldsymbol{b}_{i_1},\boldsymbol{b}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_s}$ 有相同的线性关系.

特别地,

$\boldsymbol{a}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{p_r}$ 是 A 的最大无关组 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{p_r}$ 是 B 的最大无关组;

$\boldsymbol{a}_k=\lambda_{1k}\boldsymbol{a}_{p_1}+\cdots+\lambda_{rk}\boldsymbol{a}_{p_r}\Leftrightarrow \boldsymbol{b}_k=\lambda_{1k}\boldsymbol{b}_{p_1}+\cdots+\lambda_{rk}\boldsymbol{b}_{p_r}\ (k=1,2,\cdots,m)$.

教材中指出,当齐次方程$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解时,向量组 A 与向量组 B 中各向量之间有相同的线性关系,这是因为:

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{与}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{同解}$$
$$\Rightarrow(\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_s})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\text{与}(\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_s})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\text{同解}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_s}\text{与}\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_s}\text{有相同的线性关系}.$$

问 4.4　矩阵的初等行变换对矩阵的列向量组和行向量组各有什么作用?

答　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换成为 $\boldsymbol{B}$,那么

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价,也即它们能相互线性表示.于是齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解,这是用初等行变换求解线性方程组的理论基础.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性关系(见问 4.3).这是用初等行变换求出 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组,并将其余向量用该最大无关组(惟一地)线性表示问题的理论基础.进一步,从解方程角度看,它可用来求非齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的特解(见例 10 之析).

以上这几个问题贯穿于本章的计算问题中.

问 4.5　向量组的最大无关组有什么重要意义?

答　设 A_0 是 n 维向量组 A 的一个最大无关组,那么 A_0 的良好性质是:(1) $A_0\subseteq A$,且所含向量个数 $r=R_{A_0}\leqslant n$;(2) A_0 组与 A 组等价,从而有 $R_A=R_{A_0}=r$;(3) 在所有与 A 组等价的向量组中,A_0 组含的向量个数最少.事实上,设 B 是任一与 A 组等价的向量组,由等价的传递性,B 组与 A_0 组等价,从而有
$$R_B=R_{A_0}=r,$$
于是 B 组向量个数 $\geqslant r$.

这样,用 A_0 组来“代表”A 组是最佳不过的了.特别,当 A 组为无限向量组时就能用有限向量组来“代表”,而后者可进一步转化为矩阵;凡是对有限向量组成立的结论,用最大无关组作过渡,立即可推广到无限向量组的情形中去.这正是最大无关组的意义所在.教材依次把定理 2 和定理 3 推广为定理 2′和定理 3′用的就是这个方法.

问 4.6　向量组的最大无关组与向量空间的基有什么区别与联系?

答　(1) 由定义,除零空间外,任一向量空间作为一个向量的集合必定是无限集.但向量组所含向量个数可以是有限多个.

(2) 反过来,设 V 是向量空间,把 V 看做一个无限向量组,则 V 中向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一个基的充要条件是 A_0 是 V 的一个最大无关组.向量空间 V 的维数就等于向量组 V 的秩.这时,可以认为只是所用的名称或“版本”不同而已.

(3) 如果向量空间 V 是由 s 个向量的向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 所生成的,即
$$V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),$$

这时，V 与向量组 A 的联系特别紧密.表现在以下几个方面：

1）$A \subseteq V$，且向量组 A 与向量组 V 等价；

2）A 的任一个最大无关组是 V 的一个基，特别，若 A 线性无关，则它本身就是 V 的一个基；

3）V 的维数等于 A 的秩.

问 4.7 向量空间的基有什么重要意义?

答 如问 4.6 所述，n 维向量所构成的向量空间 V(零空间除外)，必定含无限多个向量.但 V 的任一个基所含向量个数小于等于 n；V 中任一个向量都是这个基的线性组合，即可以由该基线性表示.于是，把握住基也就把握了整个向量空间；把握住有限个(个数 $\leqslant n$)向量，也就把握了无限多个向量，其意义当然是很深刻的.这与向量组用它的最大无关组来“代表”的意义是完全相同的.

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

例 3 证明：n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

析 本例有两方面的意义：大家知道 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量组 A 都能由 E 组线性表示.反过来，如果 E 组能由 A 组线性表示，那么 A 组应满足什么条件? 本例就给出了它的充要条件.

本例用方程的语言来叙述即为：

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}_n$ 有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数(称之为行满秩阵)(此即上章习题 22).此结论可看做是矩阵可逆概念的推广(当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ 有解也就是 $\boldsymbol{A}$ 可逆).

例 6 已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

析 本例具有典型意义，它讨论在向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关的条件下，由它们的若干个线性组合所构成向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的线性相关性.因向量组 A 中向量没有给出它们的分量，故不能具体计算出向量组 B，也就无从通过初等行变换等方法求向量组 B 的秩，进而判定它是否线性相关.对于这一类未给出具体数值的向量组的线性相关性，本例给出三种基本而奏效的方法，教材对它

们有较详细的叙述,不再重复。习题四中有多达7个类似问题,请读者注意.

例10 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组,并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

析 本例无论在理论上还是计算实践上都具有重要意义.本例的理论依据是矩阵 A 通过初等行变换成为 B,即 $A\overset{r}{\sim}B$,则 A 与 B 的列向量组各向量之间具有相同的线性关系(见问4.3);主要工具是矩阵 A 的行最简形.具体方法为:设 $R(A)=r$,则 A 的行最简形 B 中有 r 个单位坐标向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$,B 中其余列可以非常方便、几乎是一目了然地写成它们的线性组合.这时,A 的列向量组中蕴含的复杂线性关系也就随之而揭示出来了:A 中对应于 B 中 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 的列构成 A 的列向量组的一个最大无关组,其余列向量用此最大无关组线性表示的系数与 B 中对应列用 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 线性表示的系数依次相同.

例13 设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$,证明 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

析 剖析式子 $AB=O$ 的关键是认识到 B 的 l 个列向量是齐次方程 $Ax=0$ 的解.这一观点在本章补例和习题解答中多次采用.同时,本题的结论,作为矩阵秩的重要性质之一(矩阵秩的性质⑧),应予重视.

例25 在$\mathbb{R}^3$中取定一个基 a_1,a_2,a_3,再取一个新基 b_1,b_2,b_3,设 $A=(a_1,a_2,a_3)$,$B=(b_1,b_2,b_3)$.求用 a_1,a_2,a_3 表示 b_1,b_2,b_3 的表示式(基变换公式),并求向量在两个基中的坐标之间的关系式(坐标变换公式).

析 本例的目的是利用过渡矩阵的概念建立$\mathbb{R}^3$中一般的基变换及坐标变换公式.以下几个事实是有用的.

(1) 两个基的过渡矩阵必定是可逆矩阵.事实上,设新基 b_1,b_2,b_3 在旧基 a_1,a_2,a_3 中的系数矩阵为 P,即有

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)P,$$

则由例6知 P 为可逆矩阵,称它为从旧基到新基的过渡矩阵.

(2) 本例以自然基作为"过渡",这方法在解决向量空间的某些问题时是常用的.

二、例题增补

例4.1 设向量组 A:a_1,a_2,a_3 线性无关,向量 b_1 能由向量组 A 线性表

示，向量 $\boldsymbol{b}_2$ 不能由向量组 A 线性表示，k 为任意常数. 问：

(1) 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ 是否线性相关，为什么？

(2) 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2$ 是否线性相关，为什么？

解法 1 利用线性无关定义

(1) 设有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4(k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{0}, \tag{4.1}$$

那么 $\lambda_4=0$，因若不然，$\lambda_4\neq 0$，则

$$\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{\lambda_4}(-\lambda_1\boldsymbol{a}_1-\lambda_2\boldsymbol{a}_2-\lambda_3\boldsymbol{a}_3-\lambda_4k\boldsymbol{b}_1),$$

即 $\boldsymbol{b}_2$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1$ 线性表示，进而，由题设，$\boldsymbol{b}_2$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，此为矛盾. 这样，(4.1)式成为 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的线性无关知 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，从而由定义知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ 线性无关；

(2) 因 $\boldsymbol{b}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1$ 线性相关，所以当 $k=0$ 时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2$ 线性相关；当 $k\neq 0$ 时，设有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4(\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{0},$$

与(1)相仿，可证 $\lambda_4=0$，从而推知 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，故此向量组线性无关.

解法 2 利用方程语言

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，则由题设，方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$ 有(惟一)解 $\boldsymbol{\eta}_1$，而方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2$ 无解.

(1) 方程 $\boldsymbol{Ax}=k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ 无解，因若不然，设 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是它的解，则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2-k\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\eta}_1)=k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-k\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2,$$

即方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2$ 有解 $\boldsymbol{\eta}_2-k\boldsymbol{\eta}_1$，矛盾.

于是 $3=R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\leqslant 4\Rightarrow R(\boldsymbol{A},k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=4$

$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,k\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ 线性无关；

(2) 只讨论 $k\neq 0$ 的情形，与(1)相仿可证此时方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2$$

无解，从而 $3=R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2)\leqslant 4\Rightarrow R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}_1+k\boldsymbol{b}_2)=4$

$\Rightarrow$ 此向量组线性无关.

例 4.2 设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$，向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$，其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix};\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix},$$

(1) 证明向量组 A 与 B 等价；(2) 求向量组 A 与 B 的相互线性表示的表示式.

解　先求解(2)，若(2)已解出，(1)自然成立. 为此，把向量组 A 和 B 合起来成矩阵，并求它的行最简形：

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&3&0&1\\2&1&7&5\\4&2&14&10\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&3&3&3\\0&1&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\div 3}{\underset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是，向量 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_2$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\\ \boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\end{cases}$$

也即向量组 B 可由向量组 A 线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{K},$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$是上述线性表示的系数矩阵. 显然，$\boldsymbol{K}$ 可逆，且 $\boldsymbol{K}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$，于是

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix},$$

具体写出，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2,\\ \boldsymbol{a}_2=-2\boldsymbol{b}_1+3\boldsymbol{b}_2.\end{cases}$$

从上知两向量组能相互线性表示，故它们等价.

注　本例强调矩阵行最简形及矩阵的运算. 如果说教材例2的方法用于两向量组的“定性”，即是否等价等属性的讨论，则本例的方法用于两向量组之间的“定量”讨论，即具体给出表示式. 当系数矩阵不是方阵时，一般的处理方法可参看习题2.

例 4.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，证明向量组 $T:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证　设有常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$使

$$\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\tag{4.2}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\lambda_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\quad(\text{因 }\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2(k-1)}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0})$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0 \quad (\text{因 } \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}),$$

于是(4.2)式成为

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \boldsymbol{A\alpha} + \cdots + \lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \\ \Rightarrow &\boldsymbol{A}^{k-2}(\lambda_1 \boldsymbol{A\alpha} + \cdots + \lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0} \\ \Rightarrow &\lambda_1 \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \quad (\text{与上同理}) \\ \Rightarrow &\lambda_1 = 0, \end{aligned}$$

继续这个过程,最终证得 $\lambda_j = 0, j = 0, 1, \cdots, k-1$. 由定义知向量组 T 线性无关.

例 4.4 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = m < n$,则(　　).

(a) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不为零

(b) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量所成向量组线性无关

(c) 若 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

(d) 通过矩阵的初等行变换,必可化为$(\boldsymbol{E}_m, \boldsymbol{O})$的形式

解 选(c). 给出两种方法,说明它正确.

方法 1 因 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O} \Rightarrow R(\boldsymbol{B}) + R(\boldsymbol{A}) \leqslant m$ (矩阵秩的性质⑧)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow R(\boldsymbol{B}) \leqslant 0 \quad (\text{因 } R(\boldsymbol{A}) = m) \\ &\Rightarrow R(\boldsymbol{B}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}; \end{aligned}$$

方法 2 因 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \text{ 的列向量是齐次方程 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 的解} \\ &\Rightarrow R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) \leqslant m - R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \quad (\text{定理 } 7) \\ &\Rightarrow R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = 0, \end{aligned}$$

与方法 1 中结果相同.

注 方法 2 中的推导过程事实上就是矩阵秩的性质⑧的证明过程.

对选项(a),(b),(d),只需构作反例. 取 2×3 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $R(\boldsymbol{A}) = 2 = \boldsymbol{A}$ 的行数,它有 2 阶零子式,故(a)为错;它的第 2、第 3 列向量线性相关,故(b)为错;任何的初等行变换都无法把 $\boldsymbol{A}$ 化为$(\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{O})$的形式. 故(d)也为错.

下面是一组有关线性方程组理论的例题. 线性方程组是线性代数的重要内容. 对于求解线性方程组的基本题型,读者应予以足够重视,熟练掌握,惟有在此基础上,才有可能从容应付变化多端的有关线性方程组的习题. 限于篇幅,一般的基本题型不再在此举例.

例 4.5 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$,其中 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 为 6 维非零向量.

若 $\boldsymbol{\xi}_1=(3,2,2,2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,2,6)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则下列论断中正确的有几个？

(a) $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关　　(b) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关

(c) $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示　　(d) $\boldsymbol{a}_2$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示

解 (1) 因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=4-2=2\Rightarrow$(b)正确；

(2) 因 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,0,-4)^{\mathrm{T}}$ 也是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解$\Rightarrow 2\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}\Rightarrow \boldsymbol{a}_1=0\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4\Rightarrow$(c)正确；

(3) 因 $3\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 仍是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即有

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\begin{pmatrix}8\\4\\4\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$\Rightarrow 8\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Rightarrow \boldsymbol{a}_2=-2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3\Rightarrow$(d)正确；

(4) (a) 也正确，因如果 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关，则 $R(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\leqslant 1$，从而反复应用定理1得

$$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\xlongequal{\text{因(d)正确}}R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\xlongequal{\text{因(c)正确}}R(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\leqslant 1,$$

此与 $R(\boldsymbol{A})=2$ 矛盾.

结论：四个论断全为正确.

注 本题推导中充分地融合了本章几乎所有的概念和各主要定理. 请读者多多留意、领会概念之间的转换和定理的应用.

例 4.6 设有 n 元非齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，则(　　).

(a) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解

(b) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$

(c) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无限多解

(d) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有两个以上向量

解 选(c). 事实上设 $\boldsymbol{\eta}_1\neq\boldsymbol{\eta}_2$ 为方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，于是集合 $\{k\boldsymbol{\xi}\mid k\in\mathbb{R}\}$ 含有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的无限多个解.

注 选项(a)错，因此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 不一定有解；选项(b)错，因充分性不成立，当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，不能保证 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；选项(d)错，因 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，只能推得方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系，而基础解系中向量个数应是 $n-R(\boldsymbol{A})$，它可以是1.

例 4.7 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为3阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

求 t 的值.

解 由题设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,用矩阵秩的性质⑧,有 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$.

又因 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵,故 $R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$,结合以上两式知

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \text{ 不是满秩矩阵} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

例 4.8 设 3 阶矩阵 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(a) $t=6$ 时,$R(\boldsymbol{P})=1$　　(b) $t=6$ 时,$R(\boldsymbol{P})=2$

(c) $t\neq 6$ 时,$R(\boldsymbol{P})=1$　　(d) $t\neq 6$ 时,$R(\boldsymbol{P})=2$

解 选(c).说明如下:

从矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可知,$\boldsymbol{Q}$ 的秩 $R(\boldsymbol{Q})=\begin{cases}1, & t=6,\\ 2, & t\neq 6.\end{cases}$

又由题设,矩阵 $\boldsymbol{PQ}$ 满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,由矩阵秩的性质⑧,有

$$R(\boldsymbol{P})+R(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$$

综合上两式,得
$$R(\boldsymbol{P})\leqslant\begin{cases}2, & t=6,\\ 1, & t\neq 6.\end{cases}$$

又 $\boldsymbol{P}$ 为非零矩阵,故 $R(\boldsymbol{P})\geqslant 1$,最终得

$$\begin{cases}1\leqslant R(\boldsymbol{P})\leqslant 2, & \text{当 } t=6 \text{ 时},\\ R(\boldsymbol{P})=1, & \text{当 } t\neq 6 \text{ 时}.\end{cases}$$

注 选(a)是错误的,理由是当 $t=6$ 时矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的秩 $R(\boldsymbol{P})$ 不是必须等于 1 .同理,选(b)也是错的.选(d)为错误的理由是当 $t\neq 6$ 时,$R(\boldsymbol{P})\leqslant 1$.

例 4.9 已知方程组

$$\text{I}:\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为

$$\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1,2n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2,2n}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}b_{n1}\\b_{n2}\\\vdots\\b_{n,2n}\end{pmatrix},$$

试写出方程组

$$
\text{Ⅱ}:\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}
$$

的通解,并说明理由.

解 本题虽然计算本身并不复杂,但对于加深领会和把握齐次线性方程组理论很有帮助.

记 $n\times 2n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是方程组Ⅰ和Ⅱ的系数矩阵,由题设条件,可获得下列信息:

(1) 关于矩阵 $\boldsymbol{B}$:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的 n 个列向量是方程组Ⅰ的一个基础解系,从而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的秩,进而 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})=n$. 于是方程组Ⅱ的解集的秩 $=2n-n=n$,即方程组Ⅱ的任意 n 个线性无关的解构成它的一个基础解系.

(2) 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$:因方程组Ⅰ的基础解系含有 n 个向量,故由定理7知 $\boldsymbol{A}$ 的秩$R(\boldsymbol{A})=2n-n=n$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量以及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 n 个列向量所成向量组线性无关.

(3) 关于两矩阵之间的关系:由信息(1)有 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$,于是

$$
\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},
$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 n 个列向量是方程组Ⅱ的解,并且由(2)知它还是方程组Ⅱ的基础解系,将通解具体写出,得(注意应写成列向量)

$$
\boldsymbol{y}=k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix},k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{R}.
$$

例4.10 设$\mathbb{R}^3$中两个基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$,其中

$$
\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

(1) 求从基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵;

(2) 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 中的坐标为$(3,1,2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 中的坐标.

解 (1) 设从旧基到新基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,即

$$
\begin{aligned} &(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{P} \\ \Rightarrow\ &\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)^{-1}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3); \end{aligned}
$$

下面用初等变换的方法来求 $\boldsymbol{P}$.由

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\1&1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&2&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1-r_3\\r_2+r_3}]{r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 中的坐标为 y_1,y_2,y_3,则按坐标变换公式有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

由

$$\left(\boldsymbol{P},\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&3\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\r_3\times 2}]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&3\\1&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_1\\r_1-r_3}]{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

习 题 解 答

1. 已知向量组

$$A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix};\quad B:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix},$$

证明 B 组能由 A 组线性表示，但 A 组不能由 B 组线性表示.

证　因 B 组能由 A 组线性表示 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$；

A 组不能由 B 组线性表示 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})>R(\boldsymbol{B})$；

于是，B 组能由 A 组线性表示且 A 组不能由 B 组线性表示 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})>R(\boldsymbol{B})$. 具体计算如下：

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2&0&4&0&3&2\\1&-2&4&1&0&3\\1&1&1&2&1&0\\2&1&3&3&2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&0\\0&1&-1&1&0&-1\\0&0&0&-2&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $R(\boldsymbol{B})=2$，$R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=3$，并且上式右端矩阵的后三列所构成矩阵与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行等价，继续对它作初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$. 合起来有 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=3>R(\boldsymbol{B})=2$.

2. 已知向量组

$$A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\quad B:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

证明 A 组与 B 组等价.

证　记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$. 因 A 组与 B 组等价 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$（或 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$），故求矩阵 $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ 的行阶梯形以计算 3 个矩阵的秩. 由

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&2&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即知 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=2$，且 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 又 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 不成比例，故 $R(\boldsymbol{A})=2$. 因此，向量组 A 与 B 等价.

3. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关：

(1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

解　记(1)、(2)中向量所构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 由 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})<3=$ 向量的个数

$\Rightarrow$ 向量组(1)线性相关 (由定理4);

(2) 由 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=3=$ 向量的个数

$\Rightarrow$ 向量组(2)线性无关 (由定理4).

4. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}.$$

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$,则

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}a&1&1\\a+1&a+1&0\\1&-1&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}a-1&1&1\\0&a+1&0\\2&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2).$$

于是当 $a=-1$ 或 $a=2$ 时 $\det\boldsymbol{A}=0$,即 $R(\boldsymbol{A})<3$. 由定理4知此时向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,这里 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量. 证明(1) $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$; (2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关时,$R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$

证 (1) 由矩阵秩的性质

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a})+R(\boldsymbol{b})\leqslant 1+1=2$;

(2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关时,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为零向量,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,结论成立;若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不全为零向量,不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,因此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 成比例,有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 可能为0),于是 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(1+\lambda^2)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$,从而有

$$R(\boldsymbol{A})=R((1+\lambda^2)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a})=1.$$

6. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解一 因 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,故存在不全为零的常数 k_1,k_2,使

$$\begin{gathered}k_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+k_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}\\ \Rightarrow(k_1+k_2)\boldsymbol{b}=-k_1\boldsymbol{a}_1-k_2\boldsymbol{a}_2\ .\end{gathered}\tag{4.3}$$

因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,可知 $k_1+k_2\neq 0$.不然,由上式得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow k_1=k_2=0,$$

这与 k_1,k_2 不全为零矛盾.于是由(4.3)式,得

$$\boldsymbol{b}=-\frac{k_1}{k_1+k_2}\boldsymbol{a}_1-\frac{k_2}{k_1+k_2}\boldsymbol{a}_2,k_1,k_2\in\mathbb{R},k_1+k_2\neq 0.$$

解二 因 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,故 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,即 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关.又因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{0}$,于是存在 λ 使

$$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)\Rightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}_1-(\lambda+1)\boldsymbol{a}_2,\lambda\in\mathbb{R}.$$

这与解一的结果相同.事实上在解一中,若记 $\lambda=-\frac{k_1}{k_1+k_2}$,则 $\frac{k_2}{k_1+k_2}=\lambda+1$.

注 $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 可能为零向量.

7. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性相关,问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关?试举例说明之.

解 向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 不一定线性相关.例如令

$$\text{向量组 I}:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad \text{向量组 II}:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

则这两向量组均线性相关,但向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 线性无关.

8. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为零时,等式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

才能成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关,$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关,则有不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},\quad \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

同时成立.

答 命题(1)是错误的,例如:取向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关,因它含有零向量,但 $\boldsymbol{a}_1$ 并不能由 $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示.

注 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示,但并不指明是哪一个向量,更不是说任一个向量可由其余向量线性表示.

命题(2)是错误的,例如:取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;再取 $\lambda_1=\lambda_2=1$,则有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

成立,但 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性无关.

注 关系式 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$ (λ_i 不全为 0)只能说明向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$ 线性相关.

命题(3)是错误的,例如:取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,此时若有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

成立,只有 $\lambda_1=\lambda_2=0$,但向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都线性相关.

注 题设条件只能说明 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$ 线性无关.

命题(4)是错误的,例如:取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 均线性相关.但对此两向量组不存在不全为零的数 λ_1,λ_2,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0},\quad \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

同时成立,因由上面第一式可得

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix},$$

于是,$\lambda_2=0$,同理由第二式得 $\lambda_1=0$.

注 题设条件是说齐次方程 $(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 及 $(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 都有非零解,而结论则是说这两个齐次方程有公共的非零解.

9. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$,证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

证一 $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4$

$$=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)-(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)-(\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0},$$

由定义,知向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

证二 两向量组线性表示的矩阵形式为

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

因 $\det\boldsymbol{K}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}1-1=0$,故 $R(\boldsymbol{K})<4$.

由矩阵秩的性质⑦知

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)\leqslant R(\boldsymbol{K})<4,$$

由定理4,向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

注 从证明可见,不管 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 是否线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 总是线性相关的.

10. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$,且向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关,证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证 先把 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示的关系式写成矩阵形式:

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\&\ddots&\vdots\\0&&1\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{K}.$$

因 $\det\boldsymbol{K}=1$,故 $\boldsymbol{K}$ 是可逆矩阵,由矩阵秩的性质④,知

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r).$$

又因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关,由定理4知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)=r$,从而有 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=r$.再次应用定理4知向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

11. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,判断向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的线性相关性:

(1) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=5\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$;

(2) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$;

(3) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$.

解 (1) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&5\\1&2&3\\0&3&0\end{pmatrix}$, 而 $\begin{vmatrix}1&0&5\\1&2&3\\0&3&0\end{vmatrix}=6\neq0$,

于是 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=3$,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关;

(2) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 而 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq0$,

于是,与(1)同理,b_1,b_2,b_3 线性无关;

(3) $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 而 $\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$,

于是,$R(b_1,b_2,b_3)\leqslant 2$,$b_1,b_2,b_3$ 线性相关.

注 本习题针对教材例 6.尽管也可用其他方法求解,但无疑证三是最方便的,其好处在于可程式化处理这类问题.

12. 设向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵,且 A 组线性无关.证明 B 组线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证一 记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$,$B=(b_1,b_2,\cdots,b_r)$,则有

$$B=AK. \tag{4.4}$$

必要性:设向量组 B 线性无关,知 $R(B)=r$.又由 $B=AK$,知 $R(K)\geqslant R(B)$.但 K 含 r 列,有 $R(K)\leqslant r$,于是

$r=R(B)\leqslant R(K)\leqslant r$,即 $R(K)=r$,K 为列满秩矩阵.

充分性:设 $R(K)=r$.要证 B 组线性无关.由于

$$\begin{aligned}Bx=0&\Leftrightarrow AKx=0\\&\Rightarrow Kx=0\ (\text{因 } R(A)=s,\text{根据上章定理 4})\\&\Rightarrow x=0\ (\text{因 } R(K)=r,\text{根据上章定理 4}),\end{aligned}$$

因此,向量组 B 线性无关.

证二 由(4.4)式,因 $R(A)=s$,A 为列满秩矩阵,根据上章例 9 知 $R(B)=R(K)$.于是

$$B\text{ 组线性无关}\Leftrightarrow R(B)=r\Leftrightarrow R(K)=r.$$

13. 求下列向量组的秩,并求一个最大无关组:

(1) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$,$a_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$,$a_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$;

(2) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$,$a_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix}$,$a_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$.

解 (1) 对(a_1,a_2,a_3)作初等行变换,求它的行阶梯形:

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&82&0\\0&19&0\\0&-32&0\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$,并且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 是它的一个最大无关组;

$$(2)\ (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}$$

$$\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&9&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$,并且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 是它的一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组,并把其余列向量用最大无关组线性表示:

$$(1)\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix};\quad(2)\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}.$$

解 (1) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$,因

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{\substack{r_4-r_1\\r_3-r_2}}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&1&3&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-17r_3}\begin{pmatrix}25&31&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-31r_2}\begin{pmatrix}25&0&0&40\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\div 25}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形可知:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组,且

$$\boldsymbol{a}_4=\frac{8}{5}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3;$$

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_4\div(-2)\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-r_2}{\overset{r_2\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形可知:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关线,且

$$\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_5=-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3.$$

15. 设向量组

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

的秩为 2,求 a,b.

解 对含参数 a 和 b 的矩阵$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$作初等行变换,以求其行阶梯形.

$$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&-1&1-a&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&0&a-2&5-b\end{pmatrix},$$

于是 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$

$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2\Leftrightarrow a=2 \text{ 且 } b=5.$$

注 把含参数的列放在不含参数的列后面,常可简化计算.

16. 设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2;B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3;C:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 的秩为 $R_A=R_B=2$,

$R_C=3$,求向量组 $D:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_3-3\boldsymbol{a}_4$ 的秩.

解 $\left.\begin{array}{l} R_A=2\Rightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2 \text{ 线性无关} \\ R_B=2\Rightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3 \text{ 线性相关} \end{array}\right\}$

$\xRightarrow{\text{由定理 }5(3)}$ $\boldsymbol{a}_3$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$(惟一地)线性表示为 $\boldsymbol{a}_3=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$;将此结果代入向量组 D 得

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_3-3\boldsymbol{a}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2k_1\boldsymbol{a}_1+2k_2\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)\begin{pmatrix}1&0&2k_1\\0&1&2k_2\\0&0&-3\end{pmatrix},$$

因 $\begin{vmatrix}1&0&2k_1\\0&1&2k_2\\0&0&-3\end{vmatrix}=-3\neq 0$,故 $R_D=R_C=3$.

17. 设有 n 维向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,证明它们线性无关的充要条件是:任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证一 必要性:任给 n 维向量 $\boldsymbol{b}$,则 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关(因它所含向量个数大于向量的维数).又因 **A** 组线性无关,由定理 5(3),可知向量 $\boldsymbol{b}$ 必可由 **A** 组(惟一地)线性表示.

充分性:设任一 n 维向量能由 A 组线性表示,特别,n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由 A 组线性表示.

于是有
$$n=R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant n$$
$$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=n \xRightarrow{\text{由定理 }4} A \text{ 组线性无关}.$$

证二 设 A_0 是 A 的一个最大无关组,则有

A 组线性无关$\Leftrightarrow A_0$ 组即为 A 组$\Leftrightarrow A_0$ 组含 n 个向量

$\Leftrightarrow A_0$ 组为$\mathbb{R}^n$的一个最大无关组

$\Leftrightarrow$任一 n 维向量可由 A_0 组线性表示

$\Leftrightarrow$任一 n 维向量可由 A 组线性表示(因 A_0 组与 A 组等价).

注 证一主要依据教材第二节内容,而证二则依据第三节内容,它借助最大无关组作为过渡,使证明显得相当简洁.读者应对每一步的充分必要推理问个为什么.

18. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,且 $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$,证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k(2\leqslant k\leqslant m)$,使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1}$线性表示.

证一 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,由定义知,存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}. \tag{4.5}$$

按足标从大到小考察上式中系数 λ_i. 设其第一个不为零的数为 λ_k, 也即 $\lambda_k \neq 0$, 但 $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_m = 0$. 此足标 $k \geqslant 2$. 如若不然, 该式成为 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ 知 $\lambda_1 = 0$, 此与这些系数不全为零矛盾. 这时(4.5)式成为

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}, \text{且 } \lambda_k \neq 0, k \geqslant 2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\boldsymbol{a}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\boldsymbol{a}_{k-1},$$

于是上述向量 $\boldsymbol{a}_k$ 即满足要求.

证二　记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$. 由题设, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $R(\boldsymbol{A}) < m$. 设 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形, 则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 中一定存在不含首非零元的列 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$. 注意到 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的第 1 列含首非零元, 故 $k \geqslant 2$. 因 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ 能由 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_{k-1}$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{A}$ 中对应的 $\boldsymbol{a}_k$ 也能由 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

19. 设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, \end{cases}$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证　列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 依次构成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 于是有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}, \tag{4.6}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其行列式 $|\boldsymbol{K}| = (n-1)(-1)^{n-1} \neq 0\ (n \geqslant 2)$(见第 1 章习题 8(2)), 故 $\boldsymbol{K}$ 可逆. 由(4.6)式即得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^{-1}$, 此表明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示(其表示的系数矩阵为 $\boldsymbol{K}^{-1}$), 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

注　当 $|\boldsymbol{K}| = 0$ 时, 不能得出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 不等价的结论.

20. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(1) 记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, 求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$;

(2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解　(1) 因矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组线性无关, 故 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 本题的困难在于没有具体给出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的元素, 而仅是它们之间的一些关系式. 下面就利用这些关系式来计算 $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay},\boldsymbol{Az}).$$

因 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{z},\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},3\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\\&=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

(其实矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是向量组 $\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay},\boldsymbol{Az}$ 由向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 线性表示的系数矩阵).

(2) 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,两边取行列式,便有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$.

21. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0;\end{cases}$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&20&-15&-5\\0&32&-24&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+8r_2]{r_2\div(-5)}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可知原方程的同解方程为

$$\begin{cases}x_1+4x_3=0,\\-4x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4x_3,\\x_4=4x_2-3x_3.\end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

(2) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\3&5&4&-2\\8&7&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\7&-1&0&0\\14&-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+3r_2\\r_3+2r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}-19&0&-2&1\\-7&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得同解方程

$$\begin{cases}-19x_1-2x_3+x_4=0,\\-7x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=7x_1,\\x_4=19x_1+2x_3.\end{cases}$$

分别取$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.

注 解本题时,矩阵的初等行变换与第 3 章中的比较,已有了一些变化,要求概念掌握得更加清晰,初等变换运用得更加娴熟.

(3) $\boldsymbol{A}=(n,n-1,\cdots,1)$,可见 $R(\boldsymbol{A})=1$,从而有 $n-R(\boldsymbol{A})=n-1$ 个线性无关的解构成此方程的基础解系,并且由

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2\cdots-2x_{n-1},$$

分别取

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

代入上式就得到基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\-n\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\-(n-1)\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

22. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$,求一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,且 $R(\boldsymbol{B})=2$.

解 设 $\boldsymbol{B}$ 按列分块为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$,先分析 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 具有的性质.因 $R(\boldsymbol{B})=2$,故 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 线性无关.

又因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\Rightarrow\boldsymbol{Ab}_1=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{Ab}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解;并且这方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$.于是可知 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 还是它的一个基础解系.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\-5&1&0&-2\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-8&0&1&-1\\-5&1&0&-2\end{pmatrix}.$$

得
$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_4, \\ x_3 = 8x_1 + x_4, \end{cases}$$
分别取$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,得此方程的一个基础解系为
$$\boldsymbol{b}_1 = (1,5,8,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_2 = (0,2,1,1)^{\mathrm{T}}.$$
于是,令
$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
就满足题目的要求.

23. 求一个齐次线性方程,使它的基础解系为
$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0,1,2,3)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (3,2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

解 设所求齐次线性方程为
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}.$$
首先考虑此方程有多少个未知数?有多少个方程?因 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是 4 维的,故方程有 4 个未知数,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 4.另一方面,因基础解系含 2 个向量,故由定理 7 知 $R(\boldsymbol{A}) = 4-2 = 2$,因此方程的个数$\geqslant$2 个.这样,我们只需构造一个满足题设要求而行数最少的矩阵,也即 $\boldsymbol{A}$ 取为 2×4 矩阵,且 $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

记$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$,那么

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系

$\Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$,且 $R(\boldsymbol{A}) = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$,且 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的两个列向量是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系(因 $R(\boldsymbol{B}) = 2$).

由
$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$
得基础解系为
$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = (2,-3,0,1)^{\mathrm{T}},$$
故 $\boldsymbol{A}$ 可取为
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

24. 设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

求(1) 方程组Ⅰ与Ⅱ的基础解系;(2) Ⅰ与Ⅱ的公共解.

解 (1) 求方程组Ⅰ的基础解系:系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其基础解系可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}};$$

求方程组Ⅱ的基础解系:系数矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,故可取其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (-1,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ 为Ⅰ与Ⅱ的公共解,下面用两种方法求 $\boldsymbol{x}$ 的一般表达式.

方法一 $\boldsymbol{x}$ 是Ⅰ与Ⅱ的公共解$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}$ 是方程组Ⅲ的解,这里方程组Ⅲ为Ⅰ与Ⅱ合起来的方程组,即

$$\mathrm{III}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取其基础解系为$(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,于是Ⅰ与Ⅱ的公共解为

$$\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

方法二　以Ⅰ的通解 $\boldsymbol{x}=(-c_1,c_1,c_2,c_1)^{\mathrm{T}}$ 代入Ⅱ得

$$\begin{cases}-c_1-c_1+c_2=0,\\ c_1-c_2+c_1=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad c_2=2c_1.$$

这表明Ⅰ的解中所有形如 $(-c_1,c_1,2c_1,c_1)^{\mathrm{T}}$ 的解也是Ⅱ的解，从而是Ⅰ和Ⅱ的公共解．于是Ⅰ和Ⅱ的公共解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

25．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

提示：利用矩阵秩的性质⑥和⑧．

证
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\\ \Rightarrow&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\\ \Rightarrow&R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n\quad(\text{矩阵秩的性质⑧}).\end{aligned}$$

另一方面，由矩阵秩的性质⑥，知

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=R(\boldsymbol{E})=n,$$

因 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，故由以上两个不等式知，$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$．

26．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 $(n\geqslant2)$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n,\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1,\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0,\text{当 } R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$$

证　(1) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$．由公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得

$$n=R(\boldsymbol{E})=R(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,$$

从而
$$R(\boldsymbol{A}^*)=n;$$

注　这里也可引用习题二题24的结论．

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$ 时，由矩阵秩的定义知 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式亦即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素均为零，即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，从而 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$；

(3) 当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，由矩阵秩的定义，$\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，也即 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素不为零，故 $R(\boldsymbol{A}^*)\geqslant1$．

另一方面，因 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，有 $|\boldsymbol{A}|=0$．由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,$$

把 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 代入上式,得 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$.综合以上两个关于 $R(\boldsymbol{A}^*)$ 的不等式,便有 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

注 本题的结论很有用,值得记取.

27. 求下列非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6. \end{cases}$

解 (1) 增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-5r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\times(-1)}{\underset{\substack{r_1-r_2\\r_3+2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&-4\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}\overset{r_3\div(-2)}{\underset{\substack{r_1-2r_3\\r_2+2r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

据此,得原方程组的同解方程

$$\begin{cases} x_1=-x_3-8, \\ x_2=x_3+13, \\ x_4=2. \end{cases}$$

取 $x_3=0$ 得特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$;取 $x_3=1$ 得对应齐次方程基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(2) 增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}\overset{r_2-5r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&28&-4&14&-56\\0&14&-2&7&-28\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\div(-4)}{\underset{\substack{r_1-2r_2\\r_3+2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&9&0&4&-17\\0&-7&1&-\frac{7}{2}&14\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+9x_2+4x_4=-17, \\ -7x_2+x_3-\dfrac{7}{2}x_4=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-9x_2-4x_4-17, \\ x_3=7x_2+\dfrac{7}{2}x_4+14. \end{cases}$$

令 $x_2=x_4=0$ 得特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}$,分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得对应齐次方程的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\\dfrac{7}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

28. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3,已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量,且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

求该方程组的通解.

解　记该非齐次方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,对应齐次方程为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.因 $R(\boldsymbol{A})=3$,由定理7知此齐次方程的基础解系由1个非零解构成,也即它的任一非零解都是它的基础解系.另一方面,记向量 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\xi}&=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)\\&=2\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A\eta}_3=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

且直接计算得 $\boldsymbol{\xi}=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$.这样,$\boldsymbol{\xi}$ 就是它的一个基础解系.根据非齐次方程组解的结构知,原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

29. 设有向量组 $A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$,问 α,β 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示,且表示式惟一;

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示,且表示式不惟一,并求一般表示式.

解 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$,那么方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{4.7}$$

有解$\Leftrightarrow\boldsymbol{b}$ 可由向量组 A 线性表示,因而本题可以归结为含参数的非齐次线性方程的求解(可参看第 3 章相关习题).

(1) 当方程(4.7)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad 即\ \alpha \neq -4\ 时,$$

方程(4.7)有惟一解,从而向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 A 组线性表示,且表示式惟一;

(2) 当 $\alpha=-4$ 时,增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-5r_1}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & -1 & -1-5\beta \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix},$$

于是当 $\beta\neq0$ 时,方程(4.7)无解,从而向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由 A 组线性表示;

(3) 当 $\alpha=-4,\beta=0$时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$,方程(4.7)有无限多解,从而向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 A 组线性表示,且表示式不惟一.

因方程(4.7)的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

故 $\boldsymbol{b}$ 由向量组 A 线性表示的一般表示式为

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \quad c\in\mathbb{R}.$$

30. 设

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\quad(a_i^2+b_i^2\neq0,i=1,2,3),$$

证明三直线$\begin{cases}l_1:a_1x+b_1y+c_1=0,\\l_2:a_2x+b_2y+c_2=0,\\l_3:a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$相交于一点的充要条件为向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关,且向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证 三直线 l_1,l_2,l_3 相交于一点

$\Leftrightarrow$非齐次方程$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\boldsymbol{c}$ 有惟一解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=2$

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关,且向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

31. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$,其中 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$,求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 显然这是一个四元方程.先决定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.因 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关,故 $R(\boldsymbol{A})\geqslant3$.又

$\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示

$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关

$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关(部分相关则整体相关)

$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})\leqslant3$.

综合上面两个不等式,有 $R(\boldsymbol{A})=3$,从而对应齐次方程的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$.进一步,

$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3\Leftrightarrow\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解

$\Rightarrow\boldsymbol{x}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是它的基础解系,

又 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,

于是由非齐次线性方程解的结构,原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},c\in\mathbb{R}.$$

32. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应

的齐次线性方程组的一个基础解系,证明

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关;(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

证 (1) 设有关系式

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}, \tag{4.8}$$

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两边,并注意题设条件,得

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\boldsymbol{A}(k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r})\\&=k_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=k_0\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$,由上式知 $k_0=0$,于是,(4.8)式成为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}.$$

因向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应齐次方程的基础解系,从而线性无关,于是 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,由定义知 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

(2) 设有关系式

$$\lambda_0\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\mathbf{0},$$

也即 $$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}.$$

由(1),向量组 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关,故 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$ 并且 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0$,于是 λ_0 也等于 0,故所给向量组线性无关.

注 显然,因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_i)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_i$ 是原方程组的解.于是本题的意义在于:若有解的非齐次线性方程的系数矩阵的秩为 r,则它有 $n-r+1$个线性无关的解.而习题 34 则进一步揭示它恰好有 $n-r+1$ 个线性无关的解,并且它的任一解都可由它们线性表示.

33. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解,$k_1,\cdots,k_s$ 为实数,满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.证明 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解.

证 因 $$\begin{aligned}\boldsymbol{Ax}&=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)\\&=k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s)\\&=k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是方程 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的解.

34. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为r,向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解(见 32 题之注).试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\quad(\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证 首先,由 33 题可知,上式向量 $\boldsymbol{x}$ 是方程的解.

其次,设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程的任一解,记向量 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$,$i=1,2,\cdots,n-r$,则 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是对应齐次方程的解,且 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关(其理由与习题 32 的证明完全类似,可作为练习),于是它就是对应齐次方程的一个基础解系.这样 $\boldsymbol{\beta}$

就可由它以及 $\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性表示，即存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r}$，使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &= \lambda_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &= \lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &= \lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+\lambda_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\end{aligned}$$

上式中，$\lambda_{n-r+1}\overset{\triangle}{=\!=}1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r}$，即 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r+1}=1$.

注　此题事实上给出了非齐次线性方程组的通解的另一表达式.

35. 设 $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$满足 $x_1+\cdots+x_n=0\}$，

$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=1\}$，

问 V_1,V_2 是不是向量空间？为什么？

解　(1) V_1 是向量空间，理由是

(i) V_1 非空：$(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in V_1$；

(ii) V_1 对于向量的加法和数乘封闭. 事实上，

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

则有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}},\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}$.

因

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}y_k=0+0=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k)=\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k=\lambda\cdot 0=0,$$

故

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1,\qquad \lambda\boldsymbol{x}\in V_1.$$

(2) V_2 不是向量空间. 事实上，取

$$\boldsymbol{a}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{b}=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in V_2,$$

那么 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\overline{\in} V_2$，即 V_2 对向量加法不封闭.

36. 由 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 L_1，由 $\boldsymbol{b}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 L_2，试证 $L_1=L_2$.

证　因对应分量不成比例，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性无关. 又因

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=2$，由定理 2 的推论，知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价，从而

$$L_1 = L_2.$$

37. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为$\mathbb{R}^3$的一个基,并把$\boldsymbol{v}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$用这个基线性表示.

解 本题本质上就是例10及习题14.只不过是以向量空间的语言来叙述.因

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\div(-2)}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}\underset{r_2-4r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&0&8&-3\\0&3&0&9&-9\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-2r_2}{\overset{r_2\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix},$$

据此可知$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$,从而$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=3$,故$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是$\mathbb{R}^3$的一个基;$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$用此基线性表示式为

$$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3.$$

38. 已知$\mathbb{R}^3$的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{及 }\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 求由基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$到基$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$;(2) 设向量$\boldsymbol{x}$在前一基中的坐标为$(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,求它在后一基中的坐标.

解 (1) 记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$.因$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$与$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$均为$\mathbb{R}^3$的基,故$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为3阶可逆矩阵.由过渡矩阵定义,

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{P}\text{ 或 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

利用第3章介绍的方法可求$\boldsymbol{P}$如下:

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$;

(2) 由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,这里 y_1,y_2,y_3 是 $\boldsymbol{x}$ 在后一基中的坐标,得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)^{-1}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{P}^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&0\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$,故 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&0\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-1\\5\end{pmatrix}$.

习题4(附答案和提示)

4.1 选择题

(1) 向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m(m\geqslant 3)$线性无关的充要条件是(   );

(a) 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m\neq\boldsymbol{0}$

(b) 向量组 A 中任意两个向量都线性无关

(c) 向量组 A 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表示

(d) 向量组 A 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

(2) 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,则下列向量组线性无关的是(   );

(a) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$

(b) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$

(c) $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$

(d) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+22\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3$

(3) 设向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示,但不能由向量组Ⅰ:$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{m-1}$线性表示.记向量组Ⅱ:$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{m-1},\boldsymbol{b}$,则(   );

(a) 向量 $\boldsymbol{a}_m$ 不能由向量组Ⅰ线性表示,也不能由向量组Ⅱ线性表示

(b) 向量 $\boldsymbol{a}_m$ 不能由向量组Ⅰ线性表示,但能由向量组Ⅱ线性表示

(c) 向量 $\boldsymbol{a}_m$ 能由向量组Ⅰ线性表示,但不能由向量组Ⅱ线性表示

(d) 向量 $\boldsymbol{a}_m$ 能由向量组Ⅰ线性表示,也能由向量组Ⅱ线性表示

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 n 维列向量,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列正确的是(   );

(a) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{B\alpha}_1,\boldsymbol{B\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_s$ 线性相关

(b) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{B\alpha}_1,\boldsymbol{B\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_s$ 线性无关

(c) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{B\alpha}_1,\boldsymbol{B\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_s$ 线性相关

(d) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{B\alpha}_1,\boldsymbol{B\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_s$ 线性无关

(5) 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是对应齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$k_1,k_2\in\mathbb{R}$,则方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是(　　).

(a) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1}{2}$　　(b) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_1)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(c) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1}{2}$　　(d) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

4.2 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,问常数 l,m 满足什么条件时,向量组 $B:l\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1,m\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3$ 也线性无关?

4.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}x\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{b}$ 线性相关,求 x.

4.4 设向量组 A:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix},$$

又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)^{\mathrm{T}}$,问 a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 惟一地线性表示,并写出表示式.

4.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量,记矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}$,且 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$,证明:齐次线性方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

4.6 设线性方程组Ⅰ和Ⅱ:

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3-3x_4=1,\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}:\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=1,\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\end{cases}$$

已知方程组Ⅰ有通解 $k(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}+(1,-3,1,1)^{\mathrm{T}}$,求方程组Ⅱ的一个特解.

4.7 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,证明(1)$\boldsymbol{A}$ 可逆;(2) $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n$.

4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,它的 m 个行向量是某个 n 元齐次线性方程的一个基础解系,又 $\boldsymbol{B}$ 是 m 阶可逆矩阵,证明:$\boldsymbol{BA}$ 的行向量也是该线性方程的一个基础解系.

4.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可逆矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 不是零矩阵,求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

4.10 设 n 维向量组 $S:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,证明存在齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,使向量

组 S 是它的一个基础解系.

4.11　已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2,并且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解,且

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\6\\7\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

4.12　设四元齐次方程组 Ⅰ:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$$

且已知另一四元齐次方程组 Ⅱ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}.$$

(1) 求方程组 Ⅰ 的基础解系;

(2) 问 a 为何值时,方程组 Ⅰ 与 Ⅱ 有非零公共解,并求出全部公共解.

4.13　设$\mathbb{R}^3$中的向量在两个基中的坐标变换公式为 $y_1=x_1-x_2-x_3,y_2=-x_1+x_2,y_3=x_1+2x_3$,求从一个基到另一个基的过渡矩阵.

答案和提示

4.1　(1) (d),参看问 4.1;(2) (c),参看例 6 之析;(3) (b);

(4) (a),记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解$\Rightarrow\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$有非零解;(5) (b).

4.2　$lm\neq1$,提示:$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}-1&0&1\\l&-1&0\\0&m&-1\end{pmatrix}$,参看例 6 之析.

4.3　$x=-1$.

4.4　当 $a\neq-1$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 A 惟一地线性表示:$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$.

4.5　提示:$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})<n+1$,故方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

4.6　提示:在方程组 Ⅰ 的通解中取 $k=3$,得方程组 Ⅰ 的特解 $\boldsymbol{x}=(-2,0,4,1)^{\mathrm{T}}$,因它的第 2 个分量为零,故也必是方程组 Ⅱ 的特解.

4.7　(2) 提示:$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,仿照习题 25.

4.8　略.

4.9　提示:由题设条件可知 $R(\boldsymbol{A})=n-1$. 又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,故 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,不妨设 $A_{ij}\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 列非零,于是原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^{\mathrm{T}},k\in\mathbb{R}.$$

4.10　提示:参看习题 23.

4.11　提示:从所给关系式中可求得 $\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\5\\6\end{pmatrix}$,又 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3$ 是对应齐次方程的基础解系,于是通解为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\5\\6\end{pmatrix},k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

4.12　(2) 当 $a\neq -1$ 时,方程组Ⅰ与Ⅱ有非零公共解,公共解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

4.13　设旧基与新基(列向量组)构成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,这里 $\boldsymbol{P}$ 即为所求的过渡矩阵. 由坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

第 5 章

相似矩阵及二次型

基 本 要 求

1. 了解向量的内积、长度、正交、标准正交基、正交矩阵等概念,知道施密特正交化方法.

2. 理解矩阵的特征值与特征向量的概念,了解其性质,并掌握其求法.

3. 了解相似矩阵的概念和性质,了解矩阵可相似对角化的充要条件.

4. 了解对称矩阵的特征值与特征向量的性质,掌握利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的方法.

5. 熟悉二次型及其矩阵表示,知道二次型的秩.掌握用正交变换把二次型化为标准形的方法.

6. 会用配方法化二次型为规范形.知道惯性定理.

7. 知道二次型的正定性及其判别法.

内 容 提 要

1. 向量的内积、长度、正交

(1) 两 n 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

的内积为 $$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

(2) 非负实数 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}$称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度.当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时,向量 $\boldsymbol{x}$ 称为单位向量.$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\|\boldsymbol{x}\|=0$.

(3) 当$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0$时,称向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交.零向量与任何向量都正交.

2. 正交向量组

一组两两正交的非零向量称为正交向量组.正交向量组一定线性无关.

施密特正交化:设向量组$A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$线性无关,令

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_r - \frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]}{\|\boldsymbol{b}_{r-1}\|^2}\boldsymbol{b}_{r-1},$$

则$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$为正交向量组,且与向量组$A$等价.

设n维向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$是向量空间$V$ ($V\subseteq\mathbb{R}^n$)的一个基,如果$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$两两正交,且都是单位向量,则称它是$V$的一个标准正交基.

3. 正交矩阵

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵}&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 可逆,且 }\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 的行(列)向量组是}\mathbb{R}^n\text{ 的标准正交基.}\end{aligned}$$

4. 特征值与特征向量　设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵

(1) 若有数λ及非零列向量$\boldsymbol{\xi}$,使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi},$$

则称λ是$\boldsymbol{A}$的特征值,$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{A}$的对应于特征值λ的特征向量.

(2) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$称为特征方程,特征方程的根就是$\boldsymbol{A}$的特征值.在复数范围内$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$有$n$个特征值(重根按重数计算).

(3) 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值,则

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(ii) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$的特征值全不为零;

(iii) 若λ是$\boldsymbol{A}$的一个特征值,$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$,则$\varphi(\lambda)$是矩阵$\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值,这里

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

(4) 设λ是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值,则齐次方程

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的非零解就是方阵$\boldsymbol{A}$的对应于特征值λ的特征向量.

对应于不同特征值的特征向量是线性无关的.

5. 相似矩阵　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,

(1) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似(称 $\boldsymbol{A}$ 能对角化),即若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,则

(i) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值;

(ii) $\boldsymbol{P}$ 的第 i 个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

6. 对称矩阵的对角化

(1) 对称矩阵的性质:

(i) 对称矩阵的特征值都是实数;

(ii) 对称矩阵的对应不同特征值的特征向量正交;

(iii) 给定对称阵 $\boldsymbol{A}$,存在正交阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

(2) 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤:

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$,它们的重数依次为 $s_1,\cdots,s_l(s_1+\cdots+s_l=n)$;

(ii) 对每个 s_i 重特征值 λ_i,求方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,得 s_i 个线性无关的特征向量.再把它们正交化、单位化,得 s_i 个两两正交的单位特征向量.因 $s_1+\cdots+s_l=n$,故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量;

(iii) 用这 n 个向量构成正交阵 $\boldsymbol{P}$,便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

7. 二次型化标准形

(1) 二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为(n 元)二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,那么上列二次型的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax},$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵,并规定二次型 f 的秩为 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

(2) 二次型研究的主要问题是:寻求可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$,使

$$f(\boldsymbol{Cy})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACy}=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

这种只含平方项的二次型称为标准形.特别地,如果标准形中的系数 k_i 只在 $1,-1,0$ 三个数中取值,那么这个标准形称为二次型的规范形.

(3) 对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同．把 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的变换称为合同变换．

对二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 作可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作合同变换；把二次型化成标准形相当于把 $\boldsymbol{A}$ 用合同变换化成对角阵，即寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_n)$．

(4) 给定 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A})$，存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使

$$f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值．

(5) 也可应用配方法化二次型成标准形(或规范形)．

8．惯性定理、正定二次型

(1) 惯性定理　设二次型 f 的标准形为

$$f=k_1y_1^2+\cdots+k_ry_r^2\quad(k_i\neq0,i=1,2,\cdots,r),$$

那么系数 k_i 中正数的个数是确定的(上式中项数 r 为 f 的秩，也是确定的)．

二次型 f 的标准形中正(负)系数的个数称为二次型 f 的正(负)惯性指数．

若二次型 f 的秩为 r，正惯性指数为 p，则 f 的规范形为

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

(2) 如果 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，总有 $f(\boldsymbol{x})>0$ (或 <0)，则称二次型 f 是正定(或负定)的．并称 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定(或负定)的，记作 $\boldsymbol{A}>0$ (或 $\boldsymbol{A}<0$)．

$$\begin{aligned}f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{ 正定}&\Leftrightarrow f\text{ 的正惯性指数 }p=n\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 的 }n\text{ 个特征值全为正}\\&\Leftrightarrow f\text{ 的规范形为 }f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 合同于单位阵 }\boldsymbol{E}\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 的各阶主子式全为正}.\end{aligned}$$

学 习 要 点

本章的中心议题是对称矩阵的对角化问题．对称矩阵可以相似对角化，也可以合同对角化，而求得正交阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

这样的对角化(不妨称为正交相似对角化)既是相似，又是合同．因此，学好本章的关键是掌握对称矩阵正交相似对角化的原理和步骤．其他概念如向量的内积、长度、正交、施密特正交化过程、正交矩阵、特征值与特征向量等等都围绕着正交

相似对角化的原理和步骤这一中心议题,学这些概念是解决中心议题的需要,故在学习时要着重掌握这些概念与中心议题的联系.

二次型化标准形是对称矩阵合同对角化的直接应用,故二次型的矩阵表示是必须掌握的,这是用矩阵方法解决二次型问题的前提.由于二次型在解析几何、工程技术、经济学等各方面有广泛的应用,是一项很有用的知识,故对于用配方法化二次型成标准形(或规范形)以及惯性定理、二次型的正定性等知识需有所了解.

释疑解难

问 5.1 在向量空间中定义内积有什么意义?

答 在向量空间中,向量之间的运算只定义了加法与数乘(统称为向量的线性运算).如果把三维向量空间$\mathbb{R}^3$与解析几何中三维几何空间相比较,就会发现前者缺少向量的几何度量性质,诸如向量的长度、两向量之间的夹角,等等.但向量的几何度量性质在许多问题中(包括几何问题)有着特殊的地位.在$\mathbb{R}^n$中引入向量的内积,就能合理定义向量的长度、两向量之间的夹角等,使之进一步成为一个可度量的向量空间,于是也就有了正交向量组、单位向量、标准正交基、正交矩阵和正交变换等概念.

问 5.2 下列三个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$$

是否相似?

答 $\boldsymbol{B}$ 可由交换 $\boldsymbol{A}$ 的第2,3列及第2,3行得到.令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}$,且

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{PAP}=\boldsymbol{B},$$

由矩阵相似的定义,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.同理,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,再由相似关系的对称性和传递性,三个矩阵两两相似.

把上述结论一般化:若把对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元交换次序变为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1$,则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 相似.

问 5.3 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则它们有相同的特征值.反过来,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,那么:(1) 它们是否相似? (2) 在什么条件下,它们必定

相似?

答 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,它们可能相似,如问 5.2 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$;也可能不相似,例如,取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

则易求得两矩阵的特征值相同,均为 1.但二者不相似,因若不然,就存在 2 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},$$

与 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$ 矛盾.

(2) 当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都能对角化时,若它们有相同的特征值,则它们一定相似,证明如下:

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都能对角化且特征值相同.于是,$\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 相似.由于 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 的对角元都是 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)的特征值,只是排列的次序不同,由问 5.2 知 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 相似,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

问 5.4 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$,那么,(1) $\lambda=0$ 是不是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-r$ 重特征值? (2) 什么情形下,$\lambda=0$ 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-r$ 重特征值?

答 (1) $\lambda=0$ 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,但不一定是 $n-r$ 重,$n-r$ 是对应特征值 0 的线性无关特征向量的个数.例如

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,那么 $R(\boldsymbol{A})=1$,0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值但不是 $n-r$ 重的;

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,那么 $R(\boldsymbol{A})=0$,$n-r=2$,而 0 恰好是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 能对角化,特别若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,那么 0 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-r$ 重特征值.说明如下:设有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{ 为特征值},$$

那么 $$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\Lambda})=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{ 中非零个数},$$

于是 $$n-r=n-R(\boldsymbol{A})=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{ 中零的个数}$$
$$=\text{特征值 } \lambda=0 \text{ 的重数}.$$

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

例 3 已知 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$,使 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

析 求解本例的第一步是把所提问题归结为求一个齐次线性方程的正交基础解系.求齐次线性方程的正交基础解系是一个常见的问题,本例给出了这个问题的一种解法:先求出一个基础解系,再把所求得的基础解系正交化,便得正交基础解系.

例7 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明

(1) λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值;(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,$\dfrac{1}{\lambda}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

例8 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$,求 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值.

析 此两例的目的是熟悉特征值的一个重要性质,即若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则

(i) $\varphi(\lambda)$是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$ 的特征值,这里 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$;

(ii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,$\lambda^{-k}\varphi(\lambda)$是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-k}\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值.

特征值的这一重要而优良的性质,使计算 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$(当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时)的幂及多项式的特征值变得特别方便,因为它归结为对应多项式数值的计算.

例13 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

析 本例的目的是掌握用矩阵对角化理论计算矩阵的幂及多项式.将第2章例14和例15与本例相比较,相同的是目标:给出 $\boldsymbol{A}$,要求 $\boldsymbol{A}^n$.不同的是已知条件:前者需要三个条件(i)关系式 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA}$,(ii) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,(iii) 对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$;而后者不需任何条件.恰好相反,我们正是由 $\boldsymbol{A}$ 求得 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$(它们都不惟一),进而求得

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n).$$

因此后者更具理论性和实践性.可以形象地说前者是矩阵运算的操练,而后者是理论指导下的系列运作.

另外,虽然 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 都不是惟一的,但 $\boldsymbol{A}^n$ 却是惟一确定的,这点也请读者注意.

二、例题增补

例5.1 若非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中向量都正交,则向量组 A 必线性相关.

证 本题也即表明在向量空间$\mathbb{R}^n$ 中同时与一个非零向量正交的线性无关的向量至多是 $n-1$ 个.这在三维几何空间$\mathbb{R}^3$ 中是显然的.

记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 得 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，表明方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})<n$，从而向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性相关.

例 5.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda=2,4,\cdots,2n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，求行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$ 的值.

解一 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\lambda-3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值. 于是，由 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $2,4,\cdots,2n$ 知 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 就有特征值 $-1,1,\cdots,2n-3$，并且是它的全部特征值.

又由特征值的性质得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|&=\text{它的全部特征值之积}\\&=(-1)\times1\times\cdots\times(2n-3)\\&=-3\times5\times\cdots\times(2n-3)=-(2n-3)!!.\end{aligned}$$

解二 根据矩阵可对角化求解.

因为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\operatorname{diag}(2,4,\cdots,2n)\\ \Rightarrow\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(2,4,\cdots,2n)\boldsymbol{P}^{-1}\\ \Rightarrow\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{P}[\operatorname{diag}(2,4,\cdots,2n)-3\boldsymbol{E}]\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

上式的两边取行列式，并由矩阵取行列式性质，得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix}-1&&\\&\ddots&\\&&2n-3\end{vmatrix}|\boldsymbol{P}^{-1}|\\&=-|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}|(3\times5\times\cdots\times(2n-3))\\&=-|\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|(3\times5\times\cdots\times(2n-3))\\&=-3\times5\times\cdots\times(2n-3)=-(2n-3)!!.\end{aligned}$$

例 5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，求矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

解 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1},$$

它表明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，从而 λ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的对应的特征向量,下面寻找 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的关系.因

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}\\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}\\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\xi} = \lambda(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\xi}\\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\xi}\text{ 是 }\boldsymbol{A}\text{ 的对应于特征值}\lambda\text{ 的特征向量},
\end{aligned}$$

于是有关系式 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

例 5.4　设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(1,3,9)^{\mathrm{T}}$.又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

解一　利用 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角阵求 $\boldsymbol{A}^n$.

因 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值相异,于是 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.记矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathrm{diag}(1,2,3) = \boldsymbol{\Lambda},$$

也即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}.$$

于是 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}. \tag{5.1}$$

先利用初等行变换求出 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}$:

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$,代入(5.1)式

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

解二　将向量 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表示,再根据特征向量的定义求解.

因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是对应于不同特征值的特征向量,故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关,于是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由此向量组(惟一地)线性表示,它的表示式可由矩阵的初等行变换得到

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\xi}_1 - 2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3.$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两边,因为 $\boldsymbol{\xi}_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 是特征向量,因而有

$$\boldsymbol{A\beta} = 2\boldsymbol{A\xi}_1 - 2\boldsymbol{A\xi}_2 + \boldsymbol{A\xi}_3 = 2\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 - 2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\xi}_3,$$

同理可得 $A^n\boldsymbol{\beta}=2\lambda_1^n\xi_1-2\lambda_2^n\xi_2+\lambda_3^n\xi_3=2\xi_1-2^{n+1}\xi_2+3^n\xi_3$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

例 5.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$ 有特征值 0,问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化?

解 因 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow-(k-1)^2=0\Rightarrow k=1$,进而 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda^2(1-\lambda)$,可知 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,对应于它的特征向量为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.因

$$R(\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&1&1\\4&1&-3\end{pmatrix}=2\Rightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 的基础解系由一个向量构成},$$

也即对应于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量只有一个.于是 $\boldsymbol{A}$ 只有两个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

例 5.6 已知二次型

$$f=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2.

(1) 求参数 a 以及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

解 (1) 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&a-3\end{pmatrix},$$

因 f 的秩为 2,也即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,由上式知 $a=3$.

当 $a=3$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(4-\lambda)]{r_1+r_2}(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1}(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&6-\lambda&-3\\3&-6&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9),$$

于是,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

(2) 由定理6知,存在正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,其中 P 为正交矩阵,使二次型在新变量 y_1,y_2,y_3 下成为标准形

$$f = 4y_2^2 + 9y_3^2.$$

于是,曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1 \Leftrightarrow 4y_2^2+9y_3^2=1$. 此方程在几何上表示准线是 y_2Oy_3 平面上椭圆、母线平行于 y_1 轴的椭圆柱面.

例 5.7 下列矩阵中,与矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

合同的矩阵是哪一个? 为什么?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

答 应选(b). 理由是:

易求得 A 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=3$,于是,$A$ 所对应的二次型的标准形中正项项数(正惯性指数) $p=2$,负项项数(负惯性指数) $q=1$.

合同的二次型应有相同的正、负惯性指数,故选(b).

例 5.8 设 A 为3阶对称阵,A 的秩 $R(A)=2$,且满足条件

$$A^3 + 2A^2 = O.$$

(1) 求 A 的全部特征值; (2) 当 k 为何值时,$A+kE$ 为正定矩阵?

解 (1) 设 λ 是 A 的特征值,由题设知 λ 必满足

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ 或 } \lambda = 0.$$

上式说明 A 的特征值只可能在 -2 和 0 中取值,但到底有没有特征值 -2? 有几个? 这需要进一步讨论.

因为 A 是对称阵,故 A 必相似于对角阵 Λ;又因 $R(A)=2$,从而 $R(\Lambda)=2$,于是,Λ 的对角元素中恰好有两个 -2,一个 0. 据此,A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

(2) 首先注意到,对任意的 k,因 A 是对称阵,$A+kE$ 仍是对称阵,故欲使之成为正定阵只需令 $A+kE$ 的特征值全为正即可.

由(1) A 的特征值为 $-2,-2,0$

$\Rightarrow A+kE$ 的特征值为 $-2+k,-2+k,k$

$\Rightarrow$ 当 $k>2$ 时,$A+kE$ 的特征值全为正

$\Leftrightarrow$ 当 $k>2$ 时,$A+kE$ 为正定矩阵.

习 题 解 答

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}=(-4,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交,且 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,求 λ 和 $\boldsymbol{c}$.

解 以 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 左乘已知关系式两边得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c},$$

因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 正交,有 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=0$;$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\neq 0$,故得

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}=\frac{-10}{5}=-2;$$

进而

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

2. 试把下列向量组施密特正交化,然后再单位化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$; (2) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\text{单位化得 }\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\dfrac{(1,-2,1)^{\mathrm{T}}}{\|(1,-2,1)^{\mathrm{T}}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

注 这里并没有直接对 $\boldsymbol{b}_3$ 单位化,而是对 $(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 单位化,小小的技巧给计算带来不小的方便.

(2) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,单位化向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$，单位化向量为$\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$，

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix},$$

其单位化向量为$\frac{1}{\sqrt{35}}(-1,3,3,4)^{\mathrm{T}}$.

3. 下列矩阵是不是正交矩阵？并说明理由：

(1) $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

解 (1) 不是，因第1个列向量不是单位向量；

(2) 是，因为此矩阵的3个列向量构成$\mathbb{R}^3$的标准正交基，即它们两两正交，并且都是单位向量.

4. (1) 设$\boldsymbol{x}$为n维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，证明$\boldsymbol{H}$是对称的正交阵.

(2) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是正交阵，证明$\boldsymbol{AB}$也是正交阵.

证 (1) 对称性：$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$.

正交性：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}^2\text{（由 }\boldsymbol{H}\text{ 的对称性）}\\&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\quad\text{（矩阵乘法结合律）}\\&=\boldsymbol{E}\quad(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1).\end{aligned}$$

注 本题即第二章例9.

(2) **证一**
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad\text{（因 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\text{）}\\&=\boldsymbol{E}\quad\text{（因 }\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\text{）},\end{aligned}$$

由定义知$\boldsymbol{AB}$为正交阵；

证二 因$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为正交阵，故$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 于是$\boldsymbol{AB}$可逆，且有

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}},$$

从而 $\boldsymbol{AB}$ 是正交阵.

5. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为两两正交的单位向量组,$\boldsymbol{b}_1=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3$,证明 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 也是两两正交的单位向量组.

证一
$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]=\left[-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3,\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_3\right]$$
$$=-\frac{2}{9}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1]+\frac{4}{9}[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2]-\frac{2}{9}[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3]=-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=0,$$
故 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 正交,类似可证 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_3$ 正交;

又:
$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]=\left[-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3,-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3\right]$$
$$=\frac{1}{9}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1]+\frac{4}{9}[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2]+\frac{4}{9}[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3]=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1,$$
故 $\boldsymbol{b}_1$ 为单位向量,类似可证 $\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 为单位向量.

证二 把题设条件写成矩阵形式
$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$
上式记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$. 因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为两两正交单位向量组,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$;因 $\boldsymbol{K}$ 为正交阵,故 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}_3$. 于是
$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{AK})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AK})=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}_3,$$
这表明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组,即 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 是两两正交单位向量组.

注 上面所述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均不一定是方阵,因而不能当作正交阵.

6. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

解 (1) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_3-(\lambda+2)c_1}\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & \lambda^2-2\\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按 r_3 展开}\begin{vmatrix}-1 & \lambda^2-2\\ 3+\lambda & 7+5\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_2\div(1+\lambda)]{c_2-c_1}(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & \lambda-1\\ 3+\lambda & 4\end{vmatrix}$$

$$=-(1+\lambda)^3,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$（三重根）.

对于特征值 -1，解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

注　请读者注意，在求特征值时，尽量避免对三次多项式作因式分解.

(2) $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}-(1+\lambda) & 2 & 3\\ 1+\lambda & 1-\lambda & 3\\ 0 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2+r_1]{c_1\div(1+\lambda)}(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3-\lambda & 6\\ 0 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(1+\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 6\\ 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=0$ 时，解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=9$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-5&5&0\\5&-5&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

(3) 特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_4\leftrightarrow c_2]{r_4\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}-\lambda&1&&\\1&-\lambda&&\\&&-\lambda&1\\&&1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)^2,$$

所以 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，解方程$(A+E)x=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的线性无关特征向量为

$$p_1=(0,-1,1,0)^{\mathrm T},\quad p_2=(-1,0,0,1)^{\mathrm T};$$

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的线性无关特征向量为

$$p_3=(1,0,0,1)^{\mathrm T},p_4=(0,1,1,0)^{\mathrm T}.$$

7. 设 A 为 n 阶矩阵，证明 $A^{\mathrm T}$ 与 A 的特征值相同.

证　A 的特征值是特征多项式$|A-\lambda E|$的根，同样 $A^{\mathrm T}$ 的特征值是特征多项式$|A^{\mathrm T}-\lambda E|$的根，但根据行列式性质 1，这两个特征多项式是相等的：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}|,$$

从而它们的根也相同,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值也相同.

注 这里特征值相同的含义是:若 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值,那么它恰好也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 k 重特征值.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n$,证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值和公共的特征向量.

证 显然 $R(\boldsymbol{A})<n$.另一方面,

$$R(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 不可逆 }\Leftrightarrow 0\text{ 是 }\boldsymbol{A}\text{ 的特征值};$$

同理,0 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值 0.

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda=0$ 的特征向量依次是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的非零解.于是

$$\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{B}\text{ 有对应于 }\lambda=0\text{ 的公共特征向量}$$

$$\Leftrightarrow\text{方程组}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\end{cases}\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow\text{方程}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 有非零解 }\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}<n.$$

另一方面,由矩阵秩的性质⑤

$$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n.$$

综上,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

9. 设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

证 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 的特征值.但是,零矩阵只有特征值 0,故 $\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

注 本题并不是说 $\boldsymbol{A}$ 必须有特征值 1 和 2,例如当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 时,满足题设条件,但 $\boldsymbol{A}$ 只有特征值 1.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,且 $\det\boldsymbol{A}=-1$,证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证 $$\lambda=-1\text{ 是 }\boldsymbol{A}\text{ 的特征值 }\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0,$$

因此只需证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,$$

$$\Rightarrow 2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

11. 设 $\lambda\neq0$ 是 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的特征值,证明 λ 也是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

证 根据特征值的定义证明.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的非零特征值,$\boldsymbol{\xi}$ 是对应于它的特征向量,即有

$$\boldsymbol{AB\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}.\tag{5.2}$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 左乘上式两边,得

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{\xi} = \lambda(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}),$$

若 $\boldsymbol{B\xi}\neq\boldsymbol{0}$,则由特征值定义知,$\lambda$ 为 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.下面证明 $\boldsymbol{B\xi}\neq\boldsymbol{0}$.事实上,由 $\lambda\neq0$,$\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\lambda\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,再由(5.2)式得 $\boldsymbol{AB\xi}\neq\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{B\xi}\neq\boldsymbol{0}$.

12. 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1,2,3,求 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$.

解 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$.因1,2,3是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $\varphi(1)=3,\varphi(2)=2,\varphi(3)=3$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$ 的特征值.又:$\varphi(\boldsymbol{A})$为3阶方阵,这样 $\varphi(1),\varphi(2),\varphi(3)$便是$\varphi(\boldsymbol{A})$的全部特征值.由特征值性质得

$$\det(\varphi(\boldsymbol{A})) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3) = 3\times2\times3 = 18.$$

13. 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$,求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解 本题与例8相仿.由特征值性质得 $|\boldsymbol{A}|=1\times2\times(-3)=-6$,于是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,并且 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-6\boldsymbol{A}^{-1}$,以此代入得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = -6\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}.$$

因为当 $\lambda\ (\neq0)$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时,$-6\lambda^{-1}+3\lambda+2$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.分别取 $\lambda=1,2,-3$ 知 $-1,5,-5$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值,故 $|\boldsymbol{B}|=(-1)\times5\times(-5)=25$.

注 习题12和习题13中都需给出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值(如果有重根,还需给出各重根的情况).因此 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵的条件是不可缺少的.

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故

$$\boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A},$$

由定义,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$可对角化,求 x.

解 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\4&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2(6-\lambda),$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=1$ (二重根),$\lambda_3=6$ (单重根).

于是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量(由定理4)

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 对应于二重特征值1有两个线性无关的特征向量(定理2的推论)

$\Leftrightarrow$方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$（上一章定理7），

另一方面
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是
$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1\Leftrightarrow x=3.$$

16. 已知$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

(1) 求参数a,b及特征向量$\boldsymbol{p}$所对应的特征值；

(2) 问$\boldsymbol{A}$能不能对角化？并说明理由.

解 (1) 利用特征值和特征向量的定义.

设$\boldsymbol{p}$所对应的特征值是λ，则由题设，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

于是得到以a,b,λ为未知数的线性方程组：

$$\begin{cases}\lambda+1=0,\\a-\lambda+2=0,\\b+\lambda+1=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=-1,a=-3,b=0.$$

(2) $\boldsymbol{A}$不能相似于对角阵.理由是：当$a=-3,b=0$时，容易求得$\boldsymbol{A}$的特征多项式$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+1)^3$，故$\lambda=-1$是$\boldsymbol{A}$的三重特征值.但$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$，从而$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant1$，故齐次方程

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

没有3个线性无关的解.于是$\boldsymbol{A}$也就没有3个线性无关的特征向量.由定理4知$\boldsymbol{A}$不能相似于对角阵.

17. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

解 利用矩阵$\boldsymbol{A}$的相似对角阵来求$\boldsymbol{A}^{100}$.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&2\\0&-3-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&4\\4&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-5,\lambda_2=1,\lambda_3=5$，并且它们互不相同，由定理 4 的推论知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 对应 $\lambda_1=-5$，解方程 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}6&4&2\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}6&0&-6\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_2=1$，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&-4&4\\0&4&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_3=5$，解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-2&-1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(3) 令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix},$$

则由定理 2，$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-5,1,5),$$

于是
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

求出 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$，代入得

$$\boldsymbol{A}^{100}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{100}&&\\&1&\\&&5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5^{100}&1&2\cdot5^{100}\\-2\cdot5^{100}&0&5^{100}\\5^{100}&0&2\cdot5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^{100}-1\\0 & 5^{100} & 0\\0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}.$$

18. 在某国,每年有比例为 p 的农村居民移居城镇,有比例为 q 的城镇居民移居农村.假设该国总人口数不变,且上述人口迁移的规律也不变.把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 $y_n(x_n+y_n=1)$.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等,即 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$,求 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

解 (1) 这是一个应用问题.关系式

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

可看作是向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 到 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 的递推关系式,从而有

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

即把应用问题归结为求 $\boldsymbol{A}$ 的幂 $\boldsymbol{A}^n$.遵循这一思路,先求 $\boldsymbol{A}$.由题设,有

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-p)x_n+qy_n,\\y_{n+1}=px_n+(1-q)y_n\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p & q\\p & 1-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-p & q\\p & 1-q\end{pmatrix}.$$

(2) 再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.易求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1-p-q$.

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(q,p)^{\mathrm{T}}$;对应于 $\lambda_2=1-p-q$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$.令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,r)$,其中 $r=1-p-q$.因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & r\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & r^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix}2q-(q-p)r^n\\2p+(q-p)r^n\end{pmatrix},\ r=1-p-q.$$

19. 试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称阵化为对角阵;

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解 (1) 先求特征值:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

再求特征向量:

对应 $\lambda_1=-2$,解方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_2=1$,解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_3=4$,解方程 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_2]{r_2+r_3}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -2 & -4 & 9-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -2 & 9-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda-10),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=10,\lambda_2=\lambda_3=1$ (二重根).

对应 $\lambda_1=10$,解方程$(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -9 & -9\\ 0 & -18 & -18\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$,解方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得线性无关特征向量:$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.将 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 正交化得

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

再分别单位化得:$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

20. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y;并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 先求 x,y:

因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $5,-4,y$. 由特征值性质知

$$5+(-4)+y=\boldsymbol{A}\text{ 的特征值之和}$$
$$=\boldsymbol{A}\text{ 的对角元之和}=2+x,$$

得 $y=1+x$.

因 $\lambda=-4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,有 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=0$.

由
$$|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-9&0&9\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-4&x+4&-2\\0&0&9\end{vmatrix}=9(x-4),$$

得 $x=4$. 再代入 $y=1+x$,得 $y=5$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_3=5,\lambda_2=-4$.

再求正交阵 $\boldsymbol{P}$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_3=5$,解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 把它们正交化、单位化,得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix};$$

对应于 $\lambda_2=-4$ 解方程 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}5&-2&-4\\18&0&-18\\-9&0&9\end{pmatrix}$$
$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

注 (1) 在寻找 x,y 的关系式时,题解中用了 $\boldsymbol{A}$ 的对角元之和 $=\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元之和以及 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=0$,也可利用特征值的另一性质:$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}$ 的特征值之积 $=\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值之积 $=|\boldsymbol{\Lambda}|$,得 $3x+8=4y$. 但由 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=0$ 不能得到 x,y 的关系式,因 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|\equiv 0$.

(2) 因相似对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是给定的,所以要注意 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元对应.

21. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$;对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异,故由定理2,知向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关,于是若记矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}&=\mathrm{diag}(2,-2,1)\\ &\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(2,-2,1)\boldsymbol{P}^{-1},\end{aligned}$$

用初等行变换求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}.$$

22. 设3阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$. 对应 λ_1,λ_2 的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 对称,由定理5,有正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$. 显然 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$ 可依次取为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 的单位化向量,即

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{q}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 正交,于是 $\boldsymbol{q}_3$ 可取为方程 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的单位解向量.

由
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\end{pmatrix}$$
可知 $\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(1,-1,0)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.3}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

23. 设 3 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$,与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解一 用与前两题相同的方法,这是求解本题及类似题型的基本方法.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 3 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$. 由对称阵特征向量的性质知,$\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{p}_3$ 都正交,即有
$$\begin{cases}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0,\\ \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_3=0,\end{cases}$$
其系数矩阵 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}$ 的秩等于 1. 于是,$\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 是它的一个基础解系,取其为
$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 把向量组 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 用施密特方法正交化,得
$$\tilde{\boldsymbol{p}}_2=\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{p}}_3=\boldsymbol{p}_3-\frac{[\boldsymbol{p}_3,\tilde{\boldsymbol{p}}_2]}{[\tilde{\boldsymbol{p}}_2,\tilde{\boldsymbol{p}}_2]}\tilde{\boldsymbol{p}}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

(3) 分别把向量 $\boldsymbol{p}_1,\tilde{\boldsymbol{p}}_2,\tilde{\boldsymbol{p}}_3$ 单位化,得
$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,并有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(6,3,3),$$

于是 $$A = Q\mathrm{diag}(6,3,3)Q^{-1} = Q\mathrm{diag}(6,3,3)Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

解二 因 A 是对称阵,故存在正交阵 Q,使

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(6,3,3) = \Lambda,$$

也即 $$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}, \tag{5.4}$$

并且,若 Q 按列分块为 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,则向量 ξ_1 是对应于特征值 $\lambda_1=6$ 的单位特征向量.于是,由题设

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}. \tag{5.5}$$

由(5.4)式得 $$\begin{aligned} A-3E &= Q(\Lambda-3E)Q^{\mathrm{T}} \\ &= (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \\ \xi_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 3(\xi_1,\mathbf{0},\mathbf{0})\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \\ \xi_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= 3\xi_1\xi_1^{\mathrm{T}} \xlongequal[\text{代入}]{(5.5)\text{式}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

注 (1) 第21、22、23题都是矩阵对角化(特别是对称阵对角化)理论的应用.比较三题所给条件:第21题知3个特征值及3个特征向量;第22题知3个特征值及2个特征向量,且知 A 对称;第23题知一个二重特征值和一个单重特征值及其特征向量,且知 A 对称.由第21题的解法,再利用对称阵的特征向量正交性,便可得第22、23题的解法.

(2) 第22题求解中,在写出单位特征向量 q_1,q_2 后,由(5.3)式有

$$\begin{aligned} A &= Q\mathrm{diag}(1,-1,0)Q^{\mathrm{T}} \\ &= (q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} \\ q_2^{\mathrm{T}} \\ q_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = q_1q_1^{\mathrm{T}} - q_2q_2^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

由此可知对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量 q_3 是不必具体求出的,因为这时 A 已由 q_1,q_2 确定了.这是由0是 A 的特征值这一特殊情况所带来的方便之处.由此启发出第23题的解二:把求矩阵 A 转换成求 $A-3E$,因为0是 $A-3E$ 的二重特

征值.

24. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, a_1\neq 0, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解 (1) 首先证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 可以与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似. 显然 $R(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $R(\boldsymbol{\Lambda})=1$, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 只有一个非零对角元, 即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

(2) 其次求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值, 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 的对角元之和为 $\sum a_i^2$, 又由特征值性质: $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之和为它的 n 个对角元之和, 从而由上知 $\sum a_i^2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的(惟一的)非零特征值.

再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(i) 对应于 $\lambda=0$, 解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2-a_2r_1 \\ \cdots \\ r_n-a_nr_1}}{\overset{r_1\div a_1}{\sim}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

得 $n-1$ 个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

(ii) 用两种方法求对应于 $\lambda_1=\sum a_i^2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$.

方法一 由对称矩阵性质知 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 都正交, 即 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是满足 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k=0$ $(k=2,\cdots,n)$ 这 $n-1$ 个等式的非零向量. 另一方面, 因 $\boldsymbol{\xi}_k$ 是对应 0 特征值的特征向量, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k)=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k=0, k=2,\cdots,n,$$

最后一个式子的成立是因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, (事实上, 从(5.6)式也马上可看出这一点.) 这表明 $\boldsymbol{a}$ 具有 $\boldsymbol{\xi}_1$ 应有的性质, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{a}$. 至此已求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

方法二 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a},$$

按定义,即知 $\boldsymbol{A}$ 有非零特征值 $\lambda_1=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$,且对应特征向量为 $\boldsymbol{a}$.

注 方法二事实上给出了求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的另一方法.

25. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}$.

解 (1) 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-4=(1-\lambda)(5-\lambda)$,求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$.

对应 $\lambda_1=1$,解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2=5$,解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵,且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\\&\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(1)&0\\0&\varphi(5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}5-\lambda&1&2\\5-\lambda&2-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1-\lambda&0\\0&1&-(1+\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & -(1+\lambda)\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-5),$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=5$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵,由定理 5,存在正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(-1,1,5)=\boldsymbol{\Lambda},$$

也即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

并且 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是对应特征值 λ_i 的单位特征向量, $i=1,2,3$. 从而有

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{Q}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\varphi[\mathrm{diag}(-1,1,5)]\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\varphi(-1),\varphi(1),\varphi(5))\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\\&=12\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}},\end{aligned}\qquad(5.7)$$

其中 $\varphi(x)=x^{10}-6x^9+5x^8,\varphi(-1)=12,\varphi(1)=0,\varphi(5)=0$. 这样,只需计算出 $\boldsymbol{\xi}_1$,即对应 $\lambda_1=-1$ 的单位特征向量,代入上式即得 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

代入(5.7)式,即求得

$$\varphi(\boldsymbol{A})=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}.$$

26. 用矩阵记号表示二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

解 (1) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

(2) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&3\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

27. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$;　　　(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解　(1) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,则

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2+3x_2x_1=2x_1^2+x_2^2+4x_1x_2\\&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$;

(2)与(1)相仿,

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

故 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$.

28. 求一个正交变换化下列二次型成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;　(2) $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　(1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对应特征值 $\lambda_1=1$,解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

对应特征值 $\lambda_2=2$,解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

对应特征值 $\lambda_3=5$,解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,再作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_1=y_2,\\x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\\x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\end{cases}$$

便把 f 化为标准形

$$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2;$$

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$,它的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(1-\lambda)]{r_1+r_3}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & -2\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

对应 $\lambda_1=2$,解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_2=1$,解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_3=-1$,解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,再作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

则化 f 为标准形:$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

29. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解　记二次曲面为 $f=1$,则 f 为二次型,它的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}.$$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\-2&-5&5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\div(-\lambda)]{r_3+r_2}(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_3}(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-2\\2&10-\lambda&-5\\0&0&1\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&4\\2&10-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-11)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=11$.

对应于 $\lambda_1=0$,解方程 $Ax=0$,由

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+r_2\\r_2-2r_1}}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&11&-11\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

对应于特征值 $\lambda_2=2$,解方程 $(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

对应于特征值 $\lambda_3=11$,解方程 $(A-11E)x=0$. 由

$$A-11E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-6&-5\\-2&-5&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-6&-5\\0&-22&-22\\0&-11&-11\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_3=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，并且正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\quad \text{或}\quad \begin{cases}x=\frac{4}{3\sqrt{2}}v+\frac{1}{3}w,\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{3\sqrt{2}}v+\frac{2}{3}w,\\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{3\sqrt{2}}v-\frac{2}{3}w\end{cases}$$

即为所求，在此变换下，二次曲面的方程化为标准方程 $2v^2+11w^2=1$（它是椭圆柱面）.

30. 证明二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证　设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，由定理6，知有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

又
$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{y}\|^2,$$

从而
$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}f(\boldsymbol{x})=\max_{\|\boldsymbol{y}\|=1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\max_{\sum y_i^2=1}(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)$$
$$\leqslant\lambda_1\max_{\sum y_i^2=1}\sum y_i^2=\lambda_1.$$

另一方面，取 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{y}_0$ 为第1个分量是1的单位坐标向量，再作正交变换 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0$，则 $\|\boldsymbol{x}_0\|=\|\boldsymbol{y}_0\|=1$，并且二次型 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的值为

$$f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}_0=\lambda_1.$$

综合以上知
$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}f(\boldsymbol{x})=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1.$$

31. 用配方法化下列二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　(1) 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3+3x_2^2+5x_3^2$$

$$= (x_1+x_2-2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$
$$= (x_1+x_2-2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2-2x_3)^2 + 2(x_2+x_3)^2 - x_3^2,$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-2x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}(x_2+x_3), \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

写成矩阵形式：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵．在此变换下，f 化为规范形：

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(2) 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1+x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1+x_3)^2 - x_2^2 + (x_2+x_3)^2,$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_2+x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1+y_2-y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = -y_2+y_3, \end{cases}$

写成矩阵形式：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵．在此变换下，f 化为规范形：

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

(3) 由于 $f(x)$ 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3$$
$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$
$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \sqrt{2}x_3\right)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2,$$

令 $\begin{cases} y_1=\sqrt{2}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2-\sqrt{2}x_3, \\ y_3=\sqrt{2}x_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,这里 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵,

且易求得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是在变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下,f 化为规范形:

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

32. 设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型,求 a.

解 根据定理9(赫尔维茨定理),对 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行讨论,这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

于是,
$$\boldsymbol{A}\text{ 正定}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}>0\text{ 且 }|\boldsymbol{A}|>0.$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}>0\Rightarrow a^2<1$;由 $|\boldsymbol{A}|=-a(5a+4)>0\Rightarrow -\dfrac{4}{5}<a<0$. 合起来,当 $-\dfrac{4}{5}<a<0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 正定,从而 f 正定.

33. 判定下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

解 (1) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,它的一阶主子式 $-2<0$;二阶主子式 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=11>0$;三阶主子式 $|\boldsymbol{A}|=-38<0$. 由定理9知 f 为负定二次型.

(2) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,它的一阶主子式 $1>0$;二阶主子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2>0$;三阶主子式 $|\boldsymbol{A}|=6>0$,由定理9知 f 为正定二次型.

34．证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同．

证　充分性：若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，就有 $\boldsymbol{Ux}\neq\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的二次型在该处的值

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ux}=[\boldsymbol{Ux},\boldsymbol{Ux}]=\|\boldsymbol{Ux}\|^2>0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型是正定的，从而由定义知 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵．

必要性：因 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 n 是 $\boldsymbol{A}$ 的阶数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值．因 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，故 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$．记对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则有

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})=\boldsymbol{\Lambda}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{U}$ 可逆，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$．

习题 5(附答案和提示)

5.1　选择题

(1) 下列矩阵中可对角化的是(　　)；

(a) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,2，那么 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 为(　　)；

(a) 2　(b) 3　(c) 4　(d) 5

(3) 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有对角元为正是 f 为正定的(　　)；

(a) 充分条件但非必要条件　(b) 必要条件但非充分条件

(c) 充要条件　(d) 既非充分也非必要条件

(4) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(　　)；

(a) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$

(b) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

(c) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角阵

(d) 对任意常数 t，$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-t\boldsymbol{E}$ 相似

(5) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B(　　)；

(a) 合同且相似　　(b) 合同但不相似

(c) 不合同但相似　　(d) 既不合同也不相似

(6) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，矩阵 A 与 B 相似，则 $R(A-2E)+R(A-E)$ 等于(　　).

(a) 2　　(b) 3　　(c) 4　　(d) 5

5.2　设 A 为 n 阶矩阵，证明 A 为正交阵的充要条件是 A^* 为正交阵.

5.3　设 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值.

(1) 求 $A^3, A^3+3A+2E$ 的一个特征值；

(2) 若 A 可逆，求 $A^{-1}, E-2A^{-1}-3A^{-2}$ 的一个特征值.

5.4　设3阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，$B=A^3-5A^2$，求 $\det B$ 及 $\det(A-5E)$.

5.5　设4阶方阵 A 满足 $|A+3E|=0, AA^{\mathrm{T}}=2E, |A|<0$，求 A^* 的一个特征值，这里 A^* 为 A 的伴随矩阵.

5.6　设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是对应于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是对应于特征值 λ_2 的线性无关的特征向量，证明向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关.(此即教材定理2的推论.)

5.7　设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使 $A^k=O$（称这样的矩阵为幂零矩阵).证明：(1) $\det(A+E)=1$；(2) A 相似于对角矩阵的充要条件是 $A=O$.

5.8　已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

化为柱面方程 $y'^2+4z'^2=4$，求 a,b 的值及所用正交阵 P.

5.9　设3阶对称阵 A 的特征值是1,2,3，矩阵 A 的对应于特征值1和2的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$.求 A.

5.10　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，

(1) 求 a 和 b；

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

5.11　设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有3个线性无关的特征向量，求 x,y 应满足的条件.

5.12 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$, $\varphi(x)=x^{100}-25x^{98}+5x^{96}+19$. 求 $\varphi(A)$.

5.13 设 A 为 m 阶正定阵, B 为 $m\times n$ 矩阵, 证明: $B^{T}AB$ 为正定阵的充要条件是 $R(B)=n$.

答案和提示

5.1 (1) (c), 提示: 参看例 11; (2) (d), 提示: A 可对角化 $\Rightarrow R(A+E)=3$, $R(A-E)=2$; (3) (b); (4) (d), 提示: 由 $P^{-1}AP=B\Rightarrow P^{-1}(A-tE)P=B-tE$; (5) (a), 提示: 由第 1 章习题 8(2) 知 A 的特征值为 4,0,0,0, 且因 A 对称, 故有正交阵 P 使 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\mathrm{diag}(4,0,0,0)$; (6) (c), 提示: $A-E$ 与 $B-E$ 相似 $\Rightarrow R(A-E)=R(B-E)=1$; $A-2E$ 与 $B-2E$ 相似 $\Rightarrow R(A-2E)=R(B-2E)=3$.

5.2 略.

5.3 (1) $\lambda^3, \lambda^3+3\lambda+2$; (2) $\dfrac{1}{\lambda}, 1-\dfrac{2}{\lambda}-\dfrac{3}{\lambda^2}$.

5.4 $|B|=-288, |A-5E|=-72$.

5.5 $\dfrac{4}{3}$, 提示: 由题设知 -3 为 A 的特征值; $|A|=-4$, 再参看教材第 5 章例 8.

5.6 提示: 反证法: 设有不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_r,l_1,\cdots,l_s$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}, \tag{5.8}$$

则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\neq\mathbf{0}$, 不然 $k_1,\cdots,k_r$ 全为 0, 且 $l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}\Rightarrow l_1,\cdots,l_s$ 全为 0, 矛盾. 故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 λ_1 的特征向量, 记为 $\boldsymbol{\alpha}^*$, 同理 $l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\beta}_s$ 是 λ_2 的特征向量记为 $\boldsymbol{\beta}^*$, (5.8)式成为 $\boldsymbol{\alpha}^*+\boldsymbol{\beta}^*=\mathbf{0}$, 与定理 2 矛盾.

5.7 提示: (1) A 的特征值全为零 $\Rightarrow A+E$ 的特征值全为 1; (2) 充分性显然; 必要性: 若 A 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 一定是零矩阵, 于是, $P^{-1}AP=O\Rightarrow A=O$.

5.8 $a=3, b=1$; $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, 提示: 参看例 5.6.

5.9 $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$.

5.10 (1) $a=0, b=-2$; (2) $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

5.11 提示: A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$. 为使对应于二重特征值 1 有两个线性无关

的特征向量,矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的秩必须等于1,由此可推得 $x+y=0$.

5.12　$\varphi(\boldsymbol{A})=\frac{1}{3}(5^{97}+19)\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$,参看习题17和习题25.

5.13　提示:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵$\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0$ $\Leftrightarrow$方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解(因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵)$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B})=n$.

*第 6 章

线性空间与线性变换

基 本 要 求

1. 了解线性空间的概念，了解线性空间的基与维数，了解坐标的概念及 n 维线性空间 V_n 与数组向量空间$\mathbb{R}^n$ 同构的原理. 知道基变换与坐标变换的原理.

2. 了解线性变换的概念，知道线性变换的像空间和核. 会求线性变换的矩阵，知道线性变换在不同基中的矩阵彼此相似. 知道线性变换的秩.

内 容 提 要

1. 满足教材中所列八条规律的运算称为线性运算，定义了线性运算且对运算封闭的非空集合称为线性空间(或向量空间).

2. 线性空间的性质：

(1) 零向量是惟一的；

(2) 负向量是惟一的；

(3) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

(4) 若 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

3. 第 4 章中讨论的 n 维数组向量的有关概念，如线性组合、线性相关与线性无关、向量组的秩、向量空间的基与维数、向量在基中的坐标等，都可直接套用到线性空间中来.

4. 设在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，则 $\forall\ \boldsymbol{\alpha}\in V_n$，惟一存在一个 n 维数组向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x},$$

于是 V_n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 有一一对应的关系：$\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\boldsymbol{x}$，据此，数组向量 $\boldsymbol{x}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基[$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$]中的坐标. 对应关系 $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\boldsymbol{x}$ 也可记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{x}$.

由于 V_n 与 $\mathbb{R}^n$ 的向量一一对应，且这种对应关系保持线性组合的对应，即设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_n$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，

$$\text{若 } \boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow\boldsymbol{y},\text{则 } \lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}.$$

据此，称 V_n 与 $\mathbb{R}^n$ 同构. 于是任何 n 维线性空间都彼此同构，且都与 $\mathbb{R}^n$ 同构. 由于 V_n 与 $\mathbb{R}^n$ 同构，V_n 中的抽象的线性运算就可转化为 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算.

5. 基变换与坐标变换

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基，基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 用基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的表示式

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$$

称为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的变换，n 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为过渡矩阵. $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，并且它的第 i 个列向量是向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的坐标，$i=1,2,\cdots,n$.

设 V_n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在上述两个基中的坐标依次为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\text{和 } \boldsymbol{x}'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')^{\mathrm{T}},$$

则有坐标变换公式

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}\quad(\text{或 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}').$$

6. 设有两个线性空间 V 和 U，从 V 到 U 的映射 T 如果满足：对任何 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$，总有

$$T(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_2T(\boldsymbol{\alpha}_2),$$

则称 T 为线性映射(或线性变换).

线性变换 T 的像集 $T(V)\subseteq U$ 是一个线性空间，称为 T 的像空间，它的维数称为 T 的秩.

集合 $N_T=\{\boldsymbol{\alpha}\mid T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\in V\}$ 也是一个线性空间，称为 T 的核.

从线性空间 V 到其自身的线性映射称为 V 中的线性变换.

7. 线性变换的矩阵

设 T 是 n 维线性空间 V_n 中的线性变换，在 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，(1) 如果基的像用此基表示的表示式为

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵. 反之，给定矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$ 的线性变换 T 是惟一确定的.

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\alpha})$，如果向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标依次为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，由 $T(\boldsymbol{\alpha})=T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 这就是说，$V_n$ 中的线性变换 $\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\alpha})$ 对应 $\mathbb{R}^n$ 中的线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

8. 设线性空间 V_n 中取定两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P},$$

V_n 中的线性变换 T 在这两个基下的矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

这表明 V_n 中的线性变换 T 在不同基下的矩阵彼此相似.

学习要点

本章是线性代数几何理论的基本知识，初步了解这些知识是很有益的，它使我们能用更高的观点去审视前几章的内容，使它们有广泛的应用.

本章先介绍线性运算和线性空间的概念. 对于线性空间中的向量组，依据线性运算，也有线性组合、线性相关与线性无关、向量组的秩等概念，也有线性空间的基和维的概念. 然后着重讨论 n 维(有限维)线性空间.

在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，则 V_n 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 就可与$\mathbb{R}^n$ 中的数组向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 建立起一一对应的关系

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{x},$$

并且这个对应关系保持线性组合的对应，即若 $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow\boldsymbol{y},\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}.$$

于是把 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标，并把 V_n 中的线性运算转化为$\mathbb{R}^n$ 中的线性运算.

由于 V_n 与$\mathbb{R}^n$ 的向量有一一对应的关系，且此对应关系保持线性组合的对应，据此，称 V_n 与$\mathbb{R}^n$ 同构. 由此可知，把$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 作为 V_n 中对应向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标，其本质就是 V_n 与$\mathbb{R}^n$ 同构.

在论述基变换及线性变换时，都涉及一个基本关系式

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P},\qquad(6.1)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_n 的一个基. 我们可以从下述几方面来审视这个关系式：

(i) 从坐标角度看，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$的列向量 $\boldsymbol{p}_j$ 是向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的坐标，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\leftrightarrow(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\boldsymbol{P},(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\leftrightarrow(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{E}.$$

故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=$ 向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 的秩 $R(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的秩 $R(\boldsymbol{P})$.

(ii) 从基变换的角度看，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_n 的另一个基，则关

系式(6.1)便是从老基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到新基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的基变换公式,$\boldsymbol{P}$ 是从老基到新基的过渡矩阵.这时,由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,故 $R(\boldsymbol{P})=n$,即 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

(iii) 从线性变换的角度看,关系式(6.1)惟一确定了 V_n 中的一个线性变换 T,它把基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 变成向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$(即 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$),它在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵就是$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$的坐标所构成的矩阵$(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\boldsymbol{P}$.

上面的论述说明关系式(6.1)的重要性,理解它的涵义是掌握本章知识的一个关键.

本章中较多使用数学抽象思维的模式,例如线性运算的定义、零向量的定义等.读者对此可能比较陌生,接触多了也就能领会.线性运算的八条规律可视为线性运算的公理系统,线性运算的其他规律以及线性空间、线性变换的性质都是由此公理系统推导出来的,例如$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$ 不能认为是当然的,而需用公理系统去证明.

释疑解难

问 6.1　引入线性空间的概念有什么意义?

答　笛卡儿(Descartes)创立了坐标的概念,架起了形与数之间的桥梁,这在数学发展史上是一座伟大的里程碑.我们来分析解析几何中向量(可平移的有向线段)的坐标的定义:把几何向量的全体所构成的集合记作 V,在 V 中引入几何向量的加法(平行四边形法则)及数乘几何向量的乘法,取定3个不共面的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 惟一地线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是就有一一对应的关系

$$\text{几何向量 }\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow\text{有序数组 }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

据此,我们把 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在坐标系$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$中的坐标,并记作

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{x}.$$

由于集合 V 与$\mathbb{R}^3$ 的元素之间建立了一一对应的关系,且根据线性运算的运算规律,可以证明

$$若\ \boldsymbol{\alpha} \longleftrightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta} \longleftrightarrow \boldsymbol{y}, 则\ \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} \longleftrightarrow \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y},$$

于是我们称集合 V 为几何向量空间,并称它与数组向量空间$\mathbb{R}^3$ 同构.这样,几何向量的线性运算(几何运算)就转化为数组向量的线性运算(代数运算),使我们能用代数方法解决几何问题;反之,几何向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作为数组向量 $\boldsymbol{x}$ 的几何形象,也使我们对$\mathbb{R}^3$ 有直观的想象,也使我们能用几何方法解决代数问题(把"$\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \boldsymbol{x}$"记作"$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$",表明在线性运算中可以把 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 看做同样的元素,尽管 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是分别属于两个完全不同范畴的事物).

既然坐标有如此巨大的作用,我们自然要问:在什么样的集合中可以建立坐标系?即什么样的集合可以与$\mathbb{R}^n$ 同构?为此,提出线性空间的概念:满足八条规律的运算称为线性运算,定义了线性运算的集合称为线性空间.若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的基,则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由这个基惟一地线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x},$$

由此建立起 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与$\mathbb{R}^n$ 中的数组向量 $\boldsymbol{x}$ 之间的一一对应关系.于是线性空间 V 与$\mathbb{R}^n$ 同构,并把 $\boldsymbol{x}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$[\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$中的坐标.这样,$V$ 中的线性运算就转化为$\mathbb{R}^n$ 中的线性运算,就可以用$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 来研究 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$,甚至也可以把 $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \boldsymbol{x}$ 记作 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$,即把 $\boldsymbol{\alpha}$ 看做是 $\boldsymbol{x}$.

本章较多涉及数学的抽象思维模式.例如线性运算的定义,零向量的定义,等等.这些对非数学类专业的读者比较陌生,然而抽象思维是十分重要的.教材介绍一个在$\mathbb{R}^+$中定义线性运算的例子,由此例可领会到线性运算的广泛性及线性空间概念的广泛适用性.由于各式各样的线性运算都可转化为数组向量的线性运算,这就更加显示出对数组向量研究的重要意义.

问 6.2 下列命题是否正确?为什么?

(1) 线性变换 T 把 V 的线性相关向量组变为线性相关向量组;

(2) 线性变换 T 把 V 的线性无关向量组变为线性无关向量组.

答 (1) 正确.设 V 中向量组 $S: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,于是,存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= T(\boldsymbol{0}) = T(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_mT(\boldsymbol{\alpha}_m),\end{aligned}$$

上式表明,由向量组 S 的像构成的向量组还是线性相关的.

(2) 不正确.例如:设 T 是线性空间 V 上的零变换,即 $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in V, T(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$,则 T 是 V 的一个线性变换,但在此变换下,任一个线性无关向量组变为线性相关向量组.

问 6.3 如何理解 V_n 中线性变换 T 的秩就是 T 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$?这

一结论有什么意义?

答 由定义知,T 的秩就是 T 的像空间 $T(V_n)$的维数,这里

$$T(V_n)=\{T(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_n\}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V_n 的一个基. $\forall\boldsymbol{\beta}\in T(V_n)$,由 $T(V_n)$的定义知,存在 $\boldsymbol{\xi}\in V_n$,使 $\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\xi})$.假设 $\boldsymbol{\xi}$ 用该基表示为

$$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则
$$\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\xi})=x_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2T(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_nT(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

上式表明,$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)$线性表示,故 $\boldsymbol{\beta}\in L(T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n))$,这里记号 $L(*)$表示由向量 $*$ 生成的空间.于是

$$T(V_n)\subseteq L(T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n));$$

反过来的包含关系是显然的,故

$$T(V_n)=L(T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)).$$

这样
$$\begin{aligned}T\text{ 的秩}&=\dim(L(T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)))\\&=\text{向量组 }T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)\text{的秩}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

另一方面,设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 T 在上述基下的矩阵,由于 V_n 与$\mathbb{R}^n$ 同构,故映射

$$T(\boldsymbol{\alpha}_i)\to\boldsymbol{a}_i\quad(\boldsymbol{a}_i\text{ 为 }\boldsymbol{A}\text{ 的第 }i\text{ 个列向量})$$

是一线性映射,它保持向量组的一切线性关系,于是,(6.2)式中

向量组 $T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)$的秩$=$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩$=R(\boldsymbol{A})$.

这一结论的意义是非常深刻的.有了这个结论,抽象的线性变换的讨论可以转化为矩阵的讨论,求像空间的维数可转化为求矩阵的秩.

例题剖析与增补

一、教材例题剖析

例 1 次数不超过 n 的多项式全体(记作 $P[x]_n$)、对于通常的多项式加法、数乘多项式的乘法构成向量空间.

析 本例及下面几个例子的目的是熟悉线性空间的概念,同时也表现出线性空间的广泛性和多样性.$P[x]_n$ 是$\mathbb{R}^n$ 之外的一个重要的线性空间,其向量是多项式,维数为 $n+1$,向量 $1,x,\cdots,x^n$ 是它的基.

例 13 设 V_2 中的线性变换 T 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵.

析 本例的目的是熟悉定理 3,该定理将两矩阵的相似赋予了深刻的几何意义:

(1) 给定 V_n 中线性变换 T,则 T 在两个基下的矩阵是相似的;

(2) 反过来,若两矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同一线性变换 T 在不同基下的矩阵.

二、例题增补

例 6.1 记二阶方阵的全体对于矩阵的加法和数乘运算构成的线性空间为 M_2,设 M_2 中的两个基为

$$S_1:\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$S_2:\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

(1) 求由基 S_1 到基 S_2 的过渡矩阵;

(2) 分别求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$在上述两个基中的坐标;

(3) 求一个非零的二阶矩阵 $\boldsymbol{X}$,使 $\boldsymbol{X}$ 在上述两个基中的坐标相同.

解 (1) 因 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$,写成矩阵形式,就有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是,矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$就是由基 S_1 到基 S_2 的过渡矩阵.

(2) 由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

于是由定义知,向量 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$在基 S_1 下的坐标为

$$(a,b,c,d)^{\mathrm{T}};$$

在基 S_2 下的坐标为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-d\\d\end{pmatrix}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}$在上述两个基下坐标相同,由上述可知应有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_3\\x_3-x_4\\x_4\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=x_3=x_4=0.$$

故 $\boldsymbol{X}=x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},x_1\in\mathbb{R}$.

注 尽管本例与习题 6 所讨论的空间是不同的,但由于利用坐标(即$\mathbb{R}^n$ 中的向量)和过渡矩阵,使求解方法与过程完全类同,读者可细细体会这一点.

例 6.2 在线性空间 M_2 中(见例 6.1),取定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$.定义 M_2 中变换 T 如下:

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA},\ \forall\ \boldsymbol{X}\in M_2. \tag{6.3}$$

(1) 证明:T 是 M_2 中的线性变换;

(2) 求 T 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵.其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$是(i,j)元为 1、其余元素为零的矩阵,$i,j=1,2$.

证 (1) $\forall\ \boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in M_2,k\in\mathbb{R}$,由(6.3)式,有

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)-(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{A}\\&=(\boldsymbol{AX}_1-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{AX}_2-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{X}_1)+T(\boldsymbol{X}_2);\\T(k\boldsymbol{X}_1)&=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}_1)-(k\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{AX}_1-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A})=kT(\boldsymbol{X}_1),\end{aligned}$$

故由定义知,T 是 M_2 中的线性变换.

(2) 由(6.3)式,有

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix}$$
$$=-b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}.$$

类似地,可得
$$T(\boldsymbol{E}_{12})=-c\boldsymbol{E}_{11}+(a-d)\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22};$$
$$T(\boldsymbol{E}_{21})=b\boldsymbol{E}_{11}+(d-a)\boldsymbol{E}_{21}-b\boldsymbol{E}_{22};$$
$$T(\boldsymbol{E}_{22})=b\boldsymbol{E}_{12}-c\boldsymbol{E}_{21}.$$

于是,T 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&0\end{pmatrix}.$$

例 6.3 已知$\mathbb{R}^3$ 中线性变换

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+3z\\x+5y-z\\3x+9y+3z\end{pmatrix},$$

求 T 的像空间 $T(\mathbb{R}^3)$与核 N_T 的基与维数.

解 线性变换 T 的像空间 $T(\mathbb{R}^3)$就是$\mathbb{R}^3$ 中某一个基在 T 下的像(向量组)所生成的空间.这里显然较方便的是选取$\mathbb{R}^3$ 的自然基

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由 T 的定义知

$$T(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},T(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},T(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix},$$

于是
$$(T(\boldsymbol{e}_1),T(\boldsymbol{e}_2),T(\boldsymbol{e}_3))=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&-1\\3&9&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A},$$

于是像空间 $T(\mathbb{R}^3)$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组所生成的空间.由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&-1\\3&9&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&4&-4\\0&6&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{6.4}$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 2,且第 1 列与第 2 列线性无关,故像空间 $T(\mathbb{R}^3)$的维数等于 2,且

$T(\boldsymbol{e}_1)=(1,1,3)^{\mathrm{T}}, T(\boldsymbol{e}_2)=(1,5,9)^{\mathrm{T}}$ 是 $T(\mathbb{R}^3)$的一个基.

设 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in N_T$,由定义 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$,即 x,y,z 应满足

$$\begin{cases}x+y+3z=0,\\x+5y-z=0,\\3x+9y+3z=0,\end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵就是(6.4)式中的矩阵 $\boldsymbol{A}$,于是由(6.4)式求得基础解系为$(-4,1,1)^{\mathrm{T}}$,它即是核 N_T 的一个基,且 N_T 的维数为 1.

从本例可知,$\mathbb{R}^n$ 中的线性变换 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,$T$ 在自然基下的矩阵就是 $\boldsymbol{A}$,自然基在 T 下的像就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,T 的像空间 $T(\mathbb{R}^n)$就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组所生成的空间,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组是 $T(\mathbb{R}^n)$的一个基,T 的秩 $=R(\boldsymbol{A})$,T 的核 N_T 就是齐次线性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间.

例 6.4 试找出$\mathbb{R}^4$ 中的一个线性变换 T,使 T 的像空间 $T(\mathbb{R}^4)$与核空间 N_T 相同.

解 设 T 为所求线性变换,于是存在 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,使 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

$$\forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4,\text{由 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in T(\mathbb{R}^4)\text{及 } T(\mathbb{R}^4)=N_T \text{ 知}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\mathbf{0},$$

由向量 $\boldsymbol{x}$ 的任意性,知(1):$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$;

另一方面 $T(\mathbb{R}^4)$的维数即为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩 $=R(\boldsymbol{A})$;N_T 的维数即为方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数 $=4-R(\boldsymbol{A})$,故由 $T(\mathbb{R}^4)=N_T$,知(2):$R(\boldsymbol{A})=2$.

取
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

即合上面(1)和(2)两个要求.对应的线性变换为 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,即

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\x_1\\x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.$$

习题解答

1. 验证：

(1) 2 阶矩阵的全体 S_1；

(2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2；

(3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3，

对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，并写出各个空间的一个基.

解 (1) 显然 S_1 对于矩阵的加法和数乘是封闭的，并且满足线性运算的八条规律，由定义，S_1 对于矩阵的加法和数乘构成线性空间. 在 S_1 中取向量组

$$\pi_1: \boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

那么向量组 π_1 线性无关. 事实上，若有

$$\lambda_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\lambda_{12}\boldsymbol{E}_{12}+\lambda_{21}\boldsymbol{E}_{21}+\lambda_{22}\boldsymbol{E}_{22}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_{ij}=0, i=1,2; j=1,2;$$

另一方面，对于任意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in S_1$，

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 可由 π_1 线性表示. 综上，向量组 π_1 是 S_1 的一个基(从而 S_1 的维数为 4).

(2) 显然 S_2 中矩阵的加法和数乘满足线性运算的八条规律. 又，

$$\forall\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix}\in S_2, \forall\lambda\in\mathbb{R},$$

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a+x & b+y\\ c+z & -(a+x)\end{pmatrix}\in S_2$，故 S_2 对加法封闭；

(ii) $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & -\lambda a\end{pmatrix}\in S_2$，故 S_2 对数乘封闭，由上可知 S_2 对上述线性运算构成线性空间.

取向量组

$$\pi_2: \widetilde{\boldsymbol{E}}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

与(1)类似，可证向量组 π_2 线性无关，且

$$\forall \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in S_2,\boldsymbol{A} \text{ 可由 } \pi_2 \text{ 线性表示为}$$

$$\boldsymbol{A}=a\widetilde{\boldsymbol{E}}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}.$$

于是向量组 π_2 是 S_2 的一个基(因而其维数为 3).

(3) 因为对称矩阵的和与数乘仍是对称矩阵,即 S_3 对于矩阵加法和数乘是封闭的,与(2)同理,S_3 对于上述线性运算构成线性空间.

取向量组

$$\pi_3:\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么(i)向量组 π_3 线性无关,事实上,若有

$$\lambda_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\lambda_{12}\widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}+\lambda_{22}\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{22}=0;$$

(ii) $\forall \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S_3$,则 $\boldsymbol{A}$ 可由 π_3 线性表示为

$$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22},$$

故向量组 π_3 是 S_3 的一个基(从而它的维数为 3).

2. 验证:与向量 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 不平行的全体 3 维数组向量,对于数组向量的加法和数乘运算不构成线性空间.

证　事实上,$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 均是 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 不平行的向量,但它们的和

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

平行于 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,即该集合对于向量的加法不封闭,故不构成向量空间.

3. 在线性空间 $P[x]_3$ 中,下列向量组是否为一个基?

(1) Ⅰ: $1+x,x+x^2,1+x^3,2+2x+x^2+x^3$;

(2) Ⅱ: $-1+x,1-x^2,-2+2x+x^2,x^3$.

解　(1) 设 $k_1(1+x)+k_2(x+x^2)+k_3(1+x^3)+k_4(2+2x+x^2+x^3)=\boldsymbol{0}$ 得 $(k_1+k_3+2k_4)+(k_1+k_2+2k_4)x+(k_2+k_4)x^2+(k_3+k_4)x^3=\boldsymbol{0}$. 因 $1,x,x^2,x^3$ 线性无关,故上式中它们的系数均为 0,即有关于未知数 k_1,k_2,k_3,k_4 的齐次方程,其系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&1&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知其秩为3,故齐次方程有非零解,从而向量组Ⅰ线性相关,不是基;

(2) 类似地,对于向量组Ⅱ,设

$$k_1(-1+x)+k_2(1-x^2)+k_3(-2+2x+x^2)+k_4x^3=\mathbf{0},$$

因 $1,x,x^2,x^3$ 线性无关可得齐次线性方程

$$\begin{cases}-k_1+k_2-2k_3=0,\\ k_1+2k_3=0,\\ -k_2+k_3=0,\\ k_4=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{pmatrix}-1&1&-2&0\\1&0&2&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

它的系数矩阵秩为4,故只有零解,从而向量组Ⅱ线性无关,且含4个向量,故是 $P[x]_3$ 的一个基.

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(7,3,1)^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$$

中的坐标.

解 由定义,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中的坐标就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示式中的系数,也就是方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解. 由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&6&3&7\\3&3&1&3\\5&2&0&1\end{pmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}-8&-3&0&-2\\5&2&0&1\\3&3&1&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+2r_2\\r_2-2r_1}}{\overset{r_3+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&1\\-5&0&1&1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+5r_2\\r_1\leftrightarrow r_2}}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&6\end{pmatrix},$$

于是,$\boldsymbol{\alpha}$ 在所给基中的坐标为 $(1,-2,6)^{\mathrm{T}}$.

5. 在 $\mathbb{R}^3$ 中取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix},$$

试求坐标变换公式.

解 记 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A},\quad(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\boldsymbol{B}$,

于是有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,

即从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 故由定理 2 得坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵的初等行变换求 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$:

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -7 & -18 \\ 0 & -7 & -10 & -7 & -9 & -30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-7r_2 \\ r_2\times(-1)}]{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -3 & -8 & -11 & -29 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 28 & 40 & 96 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+3r_3 \\ r_2-2r_1}]{r_3\div 4} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 19 & 43 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -13 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 & 24 \end{array}\right),$$

于是所求坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 43 \\ -9 & -13 & -30 \\ 7 & 10 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

6. 在$\mathbb{R}^4$ 中取两个基

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,3,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (5,3,2,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (6,6,1,3)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

(1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;

(2) 求向量$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 在后一个基中的坐标;

(3) 求在两个基中有相同坐标的向量.

解 (1) 显然有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix},$$

所以过渡矩阵为
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

(2) 设向量在后一个基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标为$(x_1',x_2',x_3',x_4')^{\mathrm{T}}$,则由坐标变换公式,有

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(3) 设向量 $\boldsymbol{y}$ 在两个基下有相同的坐标$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,由坐标变换公式,并仍记坐标向量$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$为 $\boldsymbol{y}$,则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y},$$

即$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.易求得此齐次线性方程系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})=3$,从而解空间的维数等于1,且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为它的一个基础解系.故所求向量为

$$k(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数}.$$

7. 设线性空间 S_1(习题六第1题(1))中向量

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2&-1\\4&1\end{pmatrix}.$$

(1) 问 $\boldsymbol{b}_1$ 能否由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示? $\boldsymbol{b}_2$ 能否由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示?

(2) 求由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 所生成的向量空间 L 的维数和一个基.

解 写出 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 在基$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$中的坐标所构成的矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\2&-1&3&-1\\1&1&3&4\\0&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&1&-5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见(1) $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$,故 $\boldsymbol{b}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 惟一地线性表示为 $\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$;

$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)=3>R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$,故 $\boldsymbol{b}_2$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示.

(2) 进一步 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)=3$,于是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2$ 线性无关,且可作为由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 所生成空间的一个基.

8. 说明 xOy 平面上变换 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的几何意义,其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$;(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$;(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$关于 y 轴反射;

(2) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$向 y 轴投影;

(3) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$关于直线 $y=x$ 反射;

(4) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$先关于直线 $y=x$ 反射,再关于 x 轴反射;或者把向量绕原点顺时针方向旋转 90°.

9. n 阶对称阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个$\frac{1}{2}n(n+1)$维线性空间. $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵,以 $\boldsymbol{A}$ 表示 V 中的任一向量,变换

$$T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

称为合同变换. 试证合同变换 T 是 V 中的线性变换.

证 $\forall\,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V,\forall\,k\in\mathbb{R}$,由变换 T 的定义,有

$$[T(\boldsymbol{A})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=T(\boldsymbol{A}),$$

因此 $T(\boldsymbol{A})\in V$,即 T 是 V 中的变换. 又

$$T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=T(\boldsymbol{A})+T(\boldsymbol{B});$$

$$T(k\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=kT(\boldsymbol{A}).$$

由线性变换的定义知 T 是 V 中的线性变换.

注 首先要证明 T 是 V 中的变换才谈得上去证明 T 是线性的.

10. 函数集合

$$V_3=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x\mid a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x^2\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_3=\mathrm{e}^x,$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 根据微分运算的规则,容易看出 D 是 V_3 中的一个线性变换,直接计算基向量在 D 下的像,即可求得 D 在上述基下的矩阵:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathrm{D}(x^2\mathrm{e}^x)=x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{D}(x\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{D}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是有
$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$
上式中等号右端的矩阵就是 D 在上述基下的矩阵.

11. 2 阶对称矩阵的全体
$$V_3=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$$
对于矩阵的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基
$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$
在 V_3 中定义合同变换
$$T(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$
求 T 在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 下的矩阵.

解 对于 $i=1,2,3$,把 $\boldsymbol{A}_i$ 看做 V_3 中的向量,并记为 $\boldsymbol{\alpha}_i$,分别计算基向量在 T 下的像如下:

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

从而

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix},$$

即 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

习题 6(附答案和提示)

6.1 已知$\mathbb{R}^3$ 的两个基

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad 和 \quad \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵;

(2) 若由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

6.2 设 V 是所有 2 阶矩阵在矩阵的线性运算下所构成的线性空间 M_2,它的两个基 Ⅰ 和 Ⅱ 为

$$\text{Ⅰ}:\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$\text{Ⅱ}:\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}.$$

(1) 求从基 Ⅰ 到基 Ⅱ 的过渡矩阵;

(2) 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0\\2&-1\end{pmatrix}$在基 Ⅰ 和基 Ⅱ 下的坐标.

6.3 若$\mathbb{R}^3$ 中变换 T 定义为

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_1+x_2\\x_1\end{pmatrix},$$

(1) 证明 T 是$\mathbb{R}^3$ 中的线性变换; (2) 求 T 在自然基下的矩阵.

6.4 设 $V=M_2$(见习题 6.2),在 V 中定义变换 T 为

$$\forall\, \boldsymbol{A}\in V,\ T(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix};$$

(1) 证明 T 为 V 中的线性变换;

(2) 求 T 的秩.

6.5 设线性空间$\mathbb{R}^3$中的线性变换 T 在基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$,这里 $\boldsymbol{e}_i$ 为单位坐标向量,$i=1,2,3$.

(1) 求 T 在基$\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1$下的矩阵;

(2) 求 T 在基$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的矩阵.

6.6 已知线性空间$\mathbb{R}^n$中的线性变换 T 满足

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}},$$

求 T 的像空间 $T(\mathbb{R}^n)$与 T 的核 N_T.

6.7 已知$\mathbb{R}^3$的两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$,且

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

又,线性变换 T 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&7&-5\\0&4&-1\\2&8&3\end{pmatrix}$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标;

(2) 求 T 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵.

答案和提示

6.1 (1) 过渡矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$;(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

6.2 (1) 过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix};$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 在基 Ⅰ 中的坐标为 $(4,0,2,-1)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}$ 在基 Ⅱ 中的坐标为 $\boldsymbol{P}^{-1}(4,0,2,-1)^{\mathrm{T}}=\left(1,\dfrac{1}{3},2,-\dfrac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

其中

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}.$$

6.3 (1) 略;(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.4 (1) 略;(2) T 的秩等于 2.

6.5 (1) T 在(e_3,e_2,e_1)下的矩阵为 $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$;

(2) T 在 e_1+e_2,e_2,e_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

6.6 $T(\mathbb{R}^n)=\{(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}} \mid x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n-1\}$,

$N_T=\{(x,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \mid x\in\mathbb{R}\}$,

$T(\mathbb{R}^n)$的维数等于 $n-1$, N_T 的维数等于 1.

6.7 提示:(1) 过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;故 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 中的坐标为 $\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) T 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 18 & 14 & 2 \\ -18 & -12 & -3 \end{pmatrix}$.

自 测 题 一

（时间 120 分钟，总分 100 分）

1. 选择题（本题共 3 小题，每小题 4 分，共 12 分）

（1）$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$的伴随阵$\boldsymbol{C}^*=($　　$)$.

(a) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，则$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 对应 λ 的特征向量是(　　).

(a) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$　　(b) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$　　(c) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$　　(d) $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

（3）设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=($　　$)$.

(a) 2　　(b) 3　　(c) 4　　(d) 5

2. (10 分)计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+3 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2+3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n+3\end{vmatrix}.$$

3. (10 分)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

4. (12 分)已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\a\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\-1\\6\\b\end{pmatrix},$$

(1) 问 a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2) 问 a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并且写出其一般表示式.

5. (10 分)设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}8\\-4\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\7\end{pmatrix}$ 及 $B:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-4\end{pmatrix}$,证明向量组 A 与 B 等价.

6. (12 分)设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,问常数 s,t 满足什么条件时,向量组 $\boldsymbol{a}_2-s\boldsymbol{a}_1,2\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_1-t\boldsymbol{a}_3$ 也线性无关.

7. (16 分)已知二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$,求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,把 f 化为标准形,这里,$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,并指出方程 $f=4$ 表示何种曲面.

8. (10 分)设三阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,对应于 λ_1 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

9. (8 分)证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似并且合同.

简 答

1. (1) (d);(2) (c);(3) (d),$\boldsymbol{A}$ 的特征值 1,4,6,故 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=3$;又,1 是 $\boldsymbol{A}$ 的单重特征值,故 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$. 注:本题中使用了与习题 5 的 5.1(6)中完全不同的方法,两种方法都值得学习.

2. 把各列加到第一列,然后提取第一列的公因子$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+3\right)$,再通过行列式的变换化为上三角形行列式

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+3\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2+3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & \cdots & x_n+3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+3\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 3\end{vmatrix}=3^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+3\right).$$

3. $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{ABA}-8\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}\Rightarrow(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{E},$$

即 $\operatorname{diag}(4,-2,4)\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}=8(\operatorname{diag}(4,-2,4))^{-1}=\operatorname{diag}(2,-4,2).$

4. 参阅习题四题 **29**. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则有

$\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

$\Leftrightarrow$非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$,

另一方面

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & a & 1 & 6\\ 0 & 2 & 1 & b\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & a+2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b+1\end{array}\right),$$

于是:(1) 当 $b\neq -1$ 时,$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;(2) 当 $b=-1,a\neq -2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$,$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 惟一地线性表示为 $\boldsymbol{\beta}=7\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$;(3) 当 $b=-1,a=-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无限多解,其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-4k\\-k\\2k-1\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}.$$

于是,$\boldsymbol{\beta}$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的一般表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=(-4k+7)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2+(2k-1)\boldsymbol{\alpha}_3,k\in\mathbb{R}.$$

5. 显然 $R_A=R_B=2$,又

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R_A = R_B = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,两向量组等价.

6. 参看习题 4.2, $st \neq -6$.

7. f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$.

对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的两个正交化的单位特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$;对应于特征值 $\lambda_3 = 9$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3),$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,再令正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,在此变换下, f 化为标准形: $f = 9y_3^2$.

方程 $f = 4$,在几何上表示是 $y_3 = \pm\frac{2}{3}$ 的两个平行于坐标平面 y_1Oy_2 的平面,且与原点的距离为 $\frac{2}{3}$.

8. 对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,必定与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交,故可取

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_3 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

并且 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 也已正交,于是,若记

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,于是

$$A = P\text{diag}(-1,1,1)P^{-1} = P\text{diag}(-1,1,1)P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda)^2.$$

知 A 的特征值为 3,0,0,于是,A 必可正交对角化为 $B = \text{diag}(3,0,0)$,因正交相似变换既是相似变换,又是合同变换,从而矩阵 A 与 B 相似且合同.

自 测 题 二

（时间 120 分钟，总分 100 分）

1. 填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

（1）设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^6=$________.

（2）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩是________.

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\4 & t & -3\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，则 $t=$________.

（4）设 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$|\boldsymbol{A}|=2$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^3-2\boldsymbol{E}$ 必有特征值________（$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）.

2. （10 分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a+1 & a & \cdots & a\\1 & a+1 & & \\\vdots & & \ddots & \\1 & & & a+1\end{vmatrix},$$

其中未写出的元素全为 0.

3. （10 分）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，

（1）证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵；（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

4. （8 分）求下列向量组的一个最大无关组，并把其余向量用此最大无关组线性表示.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\8\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}5\\26\\-9\\-12\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}.$$

5. (14 分)已知线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=1+\lambda,\\(1-2\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=1,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=1,\end{cases}$$

问 λ 为何值时,此方程组有惟一解、无解或有无限多解?并在有无限多解时求出通解.

6. (10 分)设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 及 $B:\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3$,证明 B 组线性无关的充要条件是 A 组线性无关.

7. (8 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组,且 $\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3;\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4$.求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

8. (16 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,多项式 $\varphi(x)=x^9-25x^7$,求正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

9. (12 分)设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 通过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为 $f=y_2^2+2y_3^2$,求 a,b.

简　　答

1. (1) $10^5\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$;(2) 0,由定义或参阅习题四题 26;(3) 3;(4) $\dfrac{8}{\lambda^3}-2$.

2. 把 D_n 按第 n 行展开得递推关系式

$$\begin{aligned}D_n&=(a+1)D_{n-1}-a(a+1)^{n-2}=(a+1)^2D_{n-2}-2a(a+1)^{n-2}=\cdots\\&=(a+1)^{n-1}D_1-(n-1)a(a+1)^{n-2}=(a+1)^{n-2}[a^2-(n-3)a+1].\end{aligned}$$

3. (1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆;(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$(由(1))$\Rightarrow\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5&0\\1&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$,其中$(\boldsymbol{A}-$

$$\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

4. $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5 & 3\\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4\\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1\\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为最大无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

5. 对带参数 λ 的增广矩阵进行矩阵的初等行变换方法可参看教材第 3 章例 13,这里仅给出用行列式求解的方法.

系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 1\\ 1-2\lambda & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2),$$

所以,当 $\lambda\neq0,\lambda\neq2$ 时,方程组有惟一解;当 $\lambda=2$ 时,方程组的增广矩阵成为

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 3\\ -3 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

系数矩阵的秩 $=2$,增广矩阵的秩 $=3$,故无解;当 $\lambda=0$ 时,方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

系数矩阵的秩 $=$ 增广矩阵的秩 $=1<3$,故有无限多解,其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

6. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$,其中 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵$\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^{-1}$,

即 A 组可由 B 组线性表示$\Rightarrow A$ 组与 B 组等价$\Rightarrow R_A=R_B\Rightarrow B$ 组的秩 $=3$ 的充

要条件是 A 组的秩 $=3\Rightarrow B$ 组线性无关的充要条件是 A 组线性无关.

7. 由题设 $R(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

$$(2,-1,-3,0)^{\mathrm{T}},(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}};$$

非齐次方程特解为 $(1,0,2,-1)^{\mathrm{T}}$,故方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

8. $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-1-\lambda)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对应于特征值 $\lambda_1=5$ 的单位化特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的两线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

把它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令三阶矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求正交矩阵,且因

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(5,-1,-1)=\boldsymbol{\Lambda},$$

于是,$\boldsymbol{P}^{-1}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\varphi(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(\varphi(5),\varphi(-1),\varphi(-1))=\mathrm{diag}(0,24,24)$.

9. f 在正交变换前后的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

于是,它们相似,从而有相同的特征多项式,即

$$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|\Rightarrow\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda,$$

比较上式等号两边的 λ 的相同幂次项的系数,知

$$\begin{cases}(a-b)^2=0,\\2-a^2-b^2=2\end{cases}\Rightarrow a=b=0.$$